MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 1

RETENIR L'ESSENTIEL...

Fiche de cours

Suite : définition

Une **suite** u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

La suite u est souvent notée (u_n).

- $u(n) = u_n$ est le **terme d'indice n**.
  Le **terme qui précède** u_n est noté u_{n-1}.
  Le **terme qui suit** u_n est noté u_{n+1}.

- Dans le plan muni d'un repère, la suite (u_n) est représentée, par le **nuage de points** de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.

Suite et formule explicite

Une suite u est donnée par une **formule explicite** lorsque le **terme u_n** est donné **en fonction de n**.

Exemple

$u_n = 1 + \dfrac{5}{n+1}$ est une formule explicite.

n		u_n
0	→	$u_0 = 1 + \dfrac{5}{0+1} = 1 + \dfrac{5}{1} = 6$
1	→	$u_1 = 1 + \dfrac{5}{1+1} = 1 + \dfrac{5}{2} = 3{,}5$
2	→	$u_2 = 1 + \dfrac{5}{2+1} = \dfrac{3}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{8}{3}$
…		…

Suite et forme récurrente

Une suite u est donnée sous **forme récurrente** (d'ordre 1) lorsque le **terme u_{n+1}** est donné **en fonction du terme u_n** et qu'un terme est donné.

Un terme est exprimé en fonction du précédent.

Exemple $u_{n+1} = 1 + 0{,}2u_n$ et $u_0 = 3$.

Relation de récurrence — Un terme donné

Pour calculer u_1 à partir de u_0, je remplace n par 0.

Pour calculer u_2 à partir de u_1, je remplace n par 1.

$u_0 = 3 \longrightarrow u_1 = 1 + 0{,}2u_0 = 1 + 0{,}2 \times 3 = 1{,}6 \longrightarrow u_2 = 1 + 0{,}2u_1 = 1 + 0{,}2 \times 1{,}6 = 1{,}32$

Suites et variations

Le nombre p est un entier naturel.

(u_n) est **croissante** (**strictement croissante**) à partir de p si et seulement si : $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ ($u_{n+1} > u_n$)

(u_n) est **décroissante** (**strictement décroissante**) à partir de p si et seulement si : $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ ($u_{n+1} < u_n$).

Une suite est **constante** à partir de p si et seulement si : $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} = u_n$.

Une suite **monotone** est une suite qui est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Point méthode : déterminer les variations d'une suite (u_n)

J'utilise les variations d'une fonction.

Si $u_n = f(n)$ et f est monotone sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) et f ont le même sens de variation.

Si $\forall n \geqslant p$, $u_n > 0$, je compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

- (u_n) est **croissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- (u_n) est **décroissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Je détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- (u_n) est **croissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- (u_n) est **décroissante** à partir de p si et seulement si, $\forall n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

RETENIR L'ESSENTIEL...

Fiche de cours

Cours 3

Suite arithmétique

Relation de récurrence

Une suite (u_n) est arithmétique de **raison** r lorsque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.

On **ajoute** le même nombre r pour passer d'un terme au suivant. $u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$

Formule explicite

Une suite (u_n) est arithmétique de **raison** r si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$,

$\boldsymbol{u_n = u_p + (n - p) \times r}$.

Cette formule permet de calculer n'importe quel terme si on connaît un terme et la raison.

Sens de variation

Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

Si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante.

▶ Cours 1 p. 48

Suite géométrique

Relation de récurrence

Une suite (u_n) est géométrique de **raison** q lorsque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$.

On **multiplie** par le même nombre q pour passer d'un terme au suivant. $u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$

Formule explicite

Une suite (u_n) est géométrique de **raison** q si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$, avec $n > p$,

$\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$.

Cette formule permet de calculer n'importe quel terme si on connaît un terme et la raison.

Sens de variation

	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q < 0$	(u_n) n'est pas monotone.	(u_n) n'est pas monotone.
$0 < q < 1$	(u_n) est strictement croissante.	(u_n) est strictement décroissante.
$q = 1$	(u_n) est constante égale à u_0.	(u_n) est constante égale à u_0.
$q > 1$	(u_n) est strictement décroissante.	(u_n) est strictement croissante.

Sommes de termes

Suite arithmétique de raison r

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{([redacted]\ u_n)}{2}$$

Suite géométrique de raison $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{k=n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$