MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 9

RETENIR L'ESSENTIEL...

Fiche de cours

On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et une probabilité P définie sur Ω.
A, B et C sont trois évènements de Ω. On suppose que $P(A) \neq 0$.

Probabilité conditionnelle

La **probabilité de « B sachant A »** (sous-entendu que A est réalisé) **est :**

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

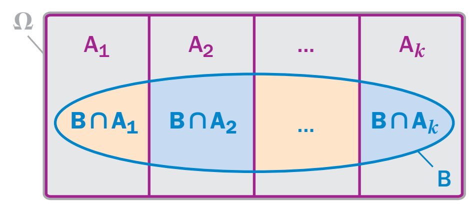
$$P_A(B) = \frac{\text{probabilité de l'intersection}}{\text{probabilité de la condition}}$$

- $P_A(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$
- Si $B \cap C = \varnothing$, alors $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$
- Si $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

Partition et formule des probabilités totales

Les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) forment une **partition** de l'univers Ω si et seulement si :

- $A_1 \neq \varnothing, A_2 \neq \varnothing, \ldots, A_k \neq \varnothing$;
- si i et j sont dans $\{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \Omega$.

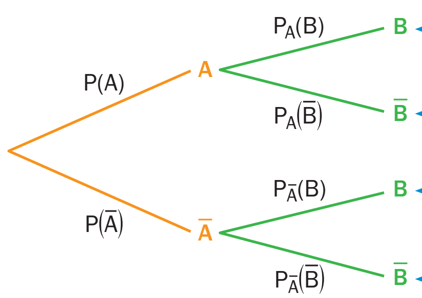


Formule des probabilités totales :
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_k)$$

Formule des probabilités totales, avec le cas particulier de la partition $\{A, \overline{A}\}$: $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.

Arbre pondéré

Représentation de la succession de deux épreuves



$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$

On peut aussi représenter cette situation à l'aide d'un tableau.

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
TOTAL	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Règle de la somme
La somme des probabilités inscrites sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.

Règle du produit
La probabilité d'un chemin, constitué d'une succession de branches, est égale au produit des probabilités inscrites sur ses branches.

Indépendance

- **A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.**
- **Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$.**

La réalisation de A n'influe pas sur la réalisation de B.
Dans ce cas, la situation peut être illustrée par l'arbre ci-contre.