MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 1

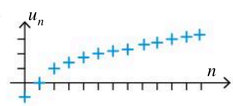
1. Modes de génération d'une suite

1. Définition d'une suite numérique

Définition

Une **suite numérique** est une fonction $u : n \mapsto u(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ (ou seulement pour $n \geqslant k$ avec k entier naturel) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Le nombre réel $u(n)$, noté u_n (se lit « u indice n »), est appelé le terme de rang n ou le terme général de la suite. On note cette suite (u_n).

Une suite (u_n) peut être représentée graphiquement par le nuage de points de coordonnées $(n ; u_n)$.



Exemple

La liste 50 ; 25 ; 12,5 ; 6,25… définit les premiers termes de la suite (u_n) telle que $u_0 = 50$, $u_1 = 25$, $u_2 = 12{,}5$, $u_3 = 6{,}25$… On dit que 50 est le terme de rang 0 ; 25 est le terme de rang 1 ; 12,5 est le terme de rang 2, etc.

2. Suite définie par une formule explicite $u_n = f(n)$

Définition

Une suite est définie par une **formule explicite** lorsque u_n s'exprime en fonction de l'entier n.
Dans ce cas, on peut calculer chaque terme u_n directement à partir de son rang n.

Exemples

- Pour tout entier naturel n, on donne $u_n = 2n$.
$u_0 = 2 \times 0 = 0$; $u_1 = 2 \times 1 = 2$.
$u_2 = 2 \times 2 = 4$; … ; $u_{20} = 2 \times 20 = 40$.

- Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on donne $v_n = \sqrt{n-1}$.
- $v_1 = \sqrt{1-1} = 0$ (le premier terme ici est v_1 et non v_0) ; $v_2 = \sqrt{2-1} = 1$; … ; $v_{17} = \sqrt{17-1} = 4$.

3. Suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition

Une suite est définie par une **relation de récurrence** lorsqu'elle est définie par la donnée de :
- son premier terme ;
- une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent.

Dans ce cas, pour calculer chaque terme u_n, il faut avoir calculé tous les termes qui le précèdent.

Rang	0	1	2	3	4	5	…	$n-1$	n	$n+1$	…
Terme	$u_0 \rightarrow$	$u_1 \rightarrow$	$u_2 \rightarrow$	$u_3 \rightarrow$	$u_4 \rightarrow$	$u_5 \rightarrow$	… $\rightarrow$	$u_{n-1} \rightarrow$	$u_n \rightarrow$	u_{n+1}	…

Exemples

- On définit la suite (u_n) par $u_0 = 5$ et chaque terme est le triple de son précédent.
$u_0 = 5$; $u_1 = 3u_0 = 3 \times 5 = 15$;
$u_2 = 3u_1 = 3 \times 15 = 45$…

- On définit la suite (v_n) par $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 4v_n - 6$.
$v_0 = 3$; $v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6$;
$v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18$…

Remarque

Il existe d'autres modes de génération d'une suite comme par exemple un algorithme ou encore un dénombrement lié à une suite de motifs géométriques.

2. Suites arithmétiques

1. Définition

Définition

Soit u_0 un nombre réel.
Une suite (u_n) de premier terme u_0 est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison de la suite (u_n)**.

Remarque

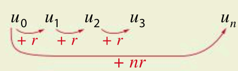
Une suite (u_n) est arithmétique si, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre ou encore si la différence $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 5$
On passe d'un terme au suivant en ajoutant 5. Ainsi $u_1 = 8$, $u_2 = 13$, $u_3 = 18$ …
La suite (u_n) est arithmétique de premier terme 3 et de raison 5.

Propriété

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$.



Remarques

- La propriété précédente peut être utilisée avec d'autres termes que u_0 :
$u_n = u_1 + (n-1)r = u_2 + (n-2)r = \ldots$, et de façon générale pour p entier naturel, $u_n = u_p + (n-p)r$.

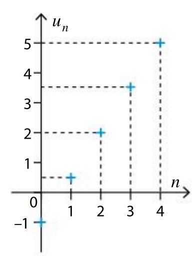
- De la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$, on peut passer à la formule explicite $u_n = u_0 + nr$.
- Pour une suite arithmétique, on a $u_n = f(n)$, où f est la fonction affine définie pour tout réel x par $f(x) = u_0 + xr$. Dans un repère, les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ sont alignés.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + 1{,}5.$$

La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison 1,5.
Donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr = -1 + 1{,}5n$.



2. Somme des premiers entiers

Propriété

Pour tout entier naturel n non nul, on a $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarque

Il s'agit de la somme des n premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1. La formule de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique quelconque est donnée et démontrée p. 21.

Connaître le cours

3. Suites géométriques

1. Définition

Définition

Soit u_0 un nombre réel.
Une suite (u_n) de premier terme u_0 est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = qu_n$.
Le nombre q est appelé **raison de la suite** (u_n).

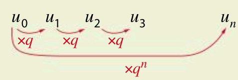
Remarque

Une suite (u_n) est géométrique si, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre.

Exemple
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n$.
On passe d'un terme au suivant en le multipliant par 2. Ainsi $u_1 = 10$, $u_2 = 20$, $u_3 = 40$…
La suite (u_n) est géométrique de premier terme 5 et de raison 2.

Propriété

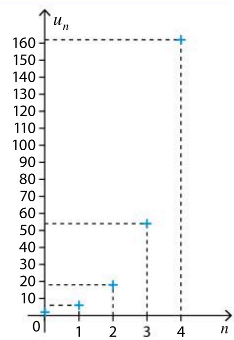
(u_n) est la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q si et seulement si, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 q^n$.



Remarques

- La propriété précédente peut être utilisée avec d'autres termes que u_0 :
$u_n = u_1 \times q^{n-1} = u_2 \times q^{n-2} = \ldots$, et, de façon générale,
pour p entier naturel, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- De la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n$, on peut passer à la formule explicite $u_n = u_0 q^n$.
Ainsi, pour une suite géométrique, $u_n = f(n)$, où f est une fonction de type « exponentielle » qui sera vue dans un chapitre ultérieur.

Exemple
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n$.
La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.
Pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times 3^n$.



2. Somme des premières puissances d'un réel q

Propriété

Pour tout entier naturel n et pour tout réel q différent de 1, on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Remarques

- Il s'agit de la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q différente de 1. La formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique quelconque est donnée et démontrée p. 21.
- Lorsque $q = 1$, la somme $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$ vaut $n + 1$.

4. Sens de variation d'une suite

1. Définition

Définition

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :
- **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- **constante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques

- Pour certaines suites, l'inégalité $u_{n+1} \geqslant u_n$ n'est vraie que pour $n \geqslant p$; on dit que (u_n) est croissante à partir du rang p.
- Lorsqu'une suite est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est monotone.
- Pour étudier le sens de variation d'une suite, on pourra étudier le signe de la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$.

Exemples

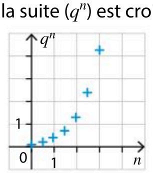
a. 0, 2, 4, 6, … la suite des entiers naturels pairs est une suite croissante, chaque terme est supérieur au précédent.
b. La suite (v_n) définie par $v_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante. En effet, ses termes d'indices pairs sont égaux à 1 et ses termes d'indices impairs sont égaux à –1.

2. Cas d'une suite arithmétique de raison r

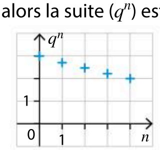
- Si $r > 0$ alors la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite est constante.

3. Cas particulier de la suite (q^n)

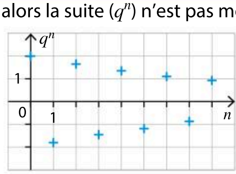
- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) est croissante.



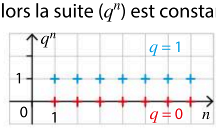
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) est décroissante.



- Si $q < 0$ alors la suite (q^n) n'est pas monotone.



- Si $q = 0$, alors la suite (q^n) est constante, $q^n = 0$.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante, $q^n = 1$.



Remarque

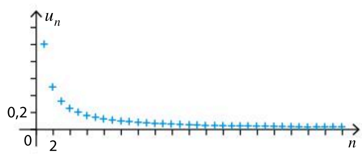
Pour une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q :
- si u_0 est positif, la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite (q^n) ;
- si u_0 est négatif, la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite (q^n).

5. Notion intuitive de limite d'une suite

S'intéresser à la limite d'une suite (u_n), c'est étudier le comportement des termes u_n quand on donne à n des valeurs entières aussi grandes que l'on veut, ce qui se dit aussi « quand n tend vers $+\infty$ ».
Différents outils (calculatrice, tableur, Python…) fournissent une représentation graphique ou un tableau de valeurs de la suite qui permettent d'émettre différentes conjectures.

1. Limite finie

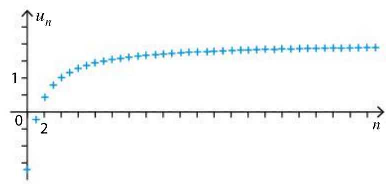
(u_n) est définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.



n	100	1 000	100 000
u_n	0,01	0,001	0,000 01

Les termes u_n semblent se rapprocher autant que l'on veut d'une valeur « limite » : 0.
On dit que la suite (u_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(v_n) est définie par $v_n = \dfrac{4n-5}{2n+3}$, pour tout entier naturel n.

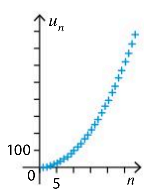


n	100	1 000	100 000
v_n	1,945 8	1,994 5	1,999 9

Les termes u_n semblent se rapprocher autant que l'on veut d'une valeur « limite » : 2.
On dit que la suite (v_n) tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

2. Limite infinie

(u_n) est définie par $u_n = n^2$ pour tout entier naturel n.



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut.
On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(w_n) est la suite arithmétique de premier terme 16 et de raison –2.

	A	B
1	n	w_n
2	0	16
3	10	-4
4	100	-184
5	10000	-19984

Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut en valeur absolue tout en étant négatifs.
On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

3. Pas de limite

Il existe des suites qui n'ont pas de limite, comme la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.