MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 2

Connaître le cours

1. Fonctions polynômes du second degré

1. Fonction polynôme

Définition

Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression algébrique peut être mise sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Les réels a, b et c sont appelés **coefficients** de la fonction polynôme.

Remarque

L'expression $ax^2 + bx + c$ est dite **forme développée** de $f(x)$ ou **trinôme du second degré**.

2. Forme canonique

Propriétés et définition

Toute fonction polynôme f de degré 2 de forme développée $ax^2 + bx + c$, admet une écriture de la forme $a\,(x - \alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Cette écriture est la **forme canonique** de la fonction polynôme.

3. Variation et représentation graphique

Soit f une fonction polynôme de degré 2 telle que, pour tout x, $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Théorème

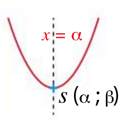
- Si $a > 0$, alors f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.
f admet un minimum égal à β atteint en $x = \alpha$.
- Si a < 0, alors f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.
f admet un maximum égal à β atteint en $x = \alpha$.

Propriété (admise)

Dans un repère du plan, la courbe représentative de f est une **parabole** de sommet $S\,(\alpha\,;\beta)$ qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

$a > 0$

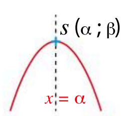
x	$-\infty$	$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$



La parabole est tournée « vers le haut »

$a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$



La parabole est tournée « vers le bas »

2. Factorisation d'un trinôme et résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

1. Factorisation

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
On appelle **discriminant** de f le réel, noté Δ, défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemples

$f(x) = 3x^2 + x - 2$;
f a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 1 + 24 = 25$.

Théorème

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, un trinôme du second degré.

- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - x_0)^2$, où $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ ne peut pas s'écrire comme le produit de deux polynômes du 1er degré.

2. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Théorème et définition

Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.

Remarque

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, si elles existent, sont appelées les **racines du trinôme** $ax^2 + bx + c$.

3. Somme et produit des racines

Propriété

Soient x_1 et x_2 les racines d'un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.
On a $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exemples

Le polynôme du second degré $P(x) = -x^2 + 2x + 3$ a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 16$.
$P(x)$ admet donc deux racines réelles x_1 et x_2.
On a alors $x_1 + x_2 = \dfrac{-2}{-1} = 2$ et $x_1\, x_2 = \dfrac{3}{-1} = -3$.

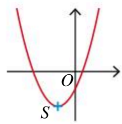
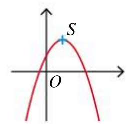
3. Signe d'un trinôme du second degré

Théorème

Soit f une fonction polynôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

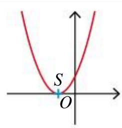
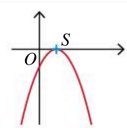
- Si $\Delta > 0$, alors $f(x)$ s'annule en x_1 et x_2 et est du signe de a sur $]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$, où x_1 et x_2 sont les racines ($x_1 < x_2$).
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ s'annule en son unique racine x_0 et est du signe de a sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Illustration graphique

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		

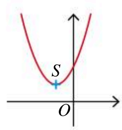
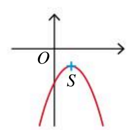
La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points distincts d'abscisses x_1 et x_2.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta = 0$		

La parabole coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse x_0.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$	 La parabole est située au-dessus de l'axe des abscisses.	 La parabole est située au-dessous de l'axe des abscisses.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

Remarque

On peut retenir ce théorème sous la forme :
Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ entre les racines quand elles existent ou du signe de a sauf entre les racines quand elles existent.

Exemple

Le polynôme $(1 - x)(3x - 2)$ a pour racines 1 et $\frac{2}{3}$. Le coefficient a est le coefficient de x^2.
On a $a = -3 < 0$.
Le trinôme est du signe de $-a$ donc positif sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3}\,;1\right]$ et du signe de a donc négatif sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right] \cup [1\,;+\infty[$.