MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 3

Connaître le cours

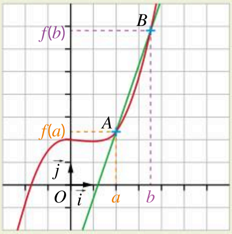
1. Taux de variation

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels distincts appartenant à I.

On appelle **taux de variation de f entre a et b**, le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Graphiquement, dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, si A est le point de la courbe représentative de f d'abscisse a et B le point d'abscisse b, la droite (AB) sécante à la courbe représentative de f a pour pente (ou coefficient directeur) le taux de variation $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Exemple

Soit f la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.

Le taux de variation de f entre 1 et 3 est $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{27-1}{2}=13$.

Remarque

Dans d'autres disciplines, en Physique par exemple, si $y=f(x)$, on utilise la notation $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ pour désigner un taux de variation.

Selon le contexte, si $x=f(t)$, le taux de variation s'écrit $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$; si $q=f(t)$, on écrit $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$.

Propriété

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$.
Le taux de variation de f entre deux nombres distincts est constant, égal à m.

Exemple

Le taux de variation de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-1$ est 3.

En effet, pour tous réels a et b distincts, on a :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{3b-1-(3a-1)}{b-a}=\frac{3b-3a}{b-a}=\frac{3(b-a)}{b-a}=3.$$

Propriétés

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels distincts appartenant à I.

- Si f est croissante sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est positif.
- Si f est décroissante sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est négatif.

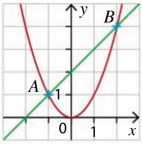
Remarque

Les réciproques des propriétés précédentes sont fausses.

Exemple

Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ donc le taux de variation entre -4 et -2 est négatif.

Contre-exemple



$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{4-1}{3}=1$$

Le taux de variation de f entre -1 et 2 est strictement positif, or la fonction f n'est pas croissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

Connaître le cours

2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

1. Point de vue algébrique

Définition

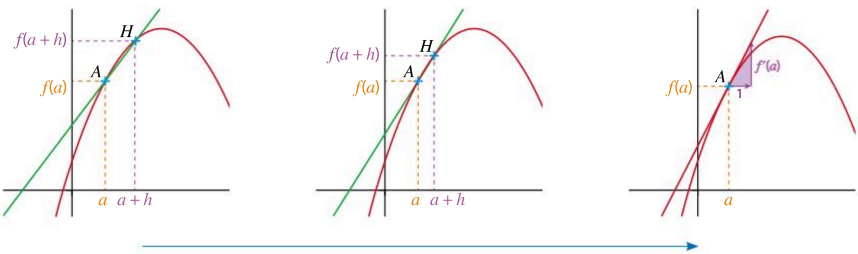
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre appartenant à I. Soit h un nombre réel non nul tel que $a + h$ appartient à I.
On dit que f est dérivable en a lorsque le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un unique nombre réel lorsque h tend vers zéro.
Ce nombre limite est appelé **nombre dérivé de f en a.** On le note $f'(a)$.

Remarque

Une fonction peut ne pas être dérivable en un réel a.
Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ ne sont pas dérivables en 0.

2. Tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre appartenant à I et h un nombre réel non nul tel que $a + h$ appartient à I. Soit A le point de la courbe représentative de f d'abscisse a et H le point de la courbe représentative de f d'abscisse $a + h$.



***h* se rapproche de zéro**

Lorsque h tend vers zéro, le point H se rapproche du point A et la sécante (AH) de coefficient directeur

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'une position limite (en rouge sur le dessin). Si f est dérivable en a,
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ lorsque h tend vers 0. On admet alors que ce nombre dérivé est le coefficient directeur de la droite qui correspond à la position limite de (AH).

Définition

Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $A(a\,;f(a))$.
La **tangente à la courbe** représentative de f au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par A.

Propriété

Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $A(a\,;f(a))$.
La tangente à la courbe représentative de f au point A a pour équation réduite $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Remarque

Localement, la courbe représentative de f au voisinage du point A est presque confondue avec sa tangente. Autrement dit, lorsque $x \approx a$, on a $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$.