MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 4

1. Fonctions dérivables sur un intervalle

1. Définition de la dérivée d'une fonction

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **dérivable** sur I lorsque f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I, noté $f'(x)$.
- On appelle **fonction dérivée** de f sur I, notée f', la fonction définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

2. Fonction dérivée des fonctions de référence

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
Fonction constante : $f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction affine : $f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Fonction carré : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Fonction puissance : $f(x) = x^n$, entier naturel non nul	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Fonction valeur absolue : $f(x) = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ pour } x \in]-\infty\,;0[\\ 1 \text{ pour } x \in]0\,;+\infty[\end{cases}$

3. Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

1. La fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

2. Soit k un réel. La fonction ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.

3. La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

4. Si la fonction u ne s'annule pas sur I alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

5. Si la fonction v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Théorème (admis) : Dérivée de la fonction $f : x \mapsto g(mx + p)$

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout x réel tel que $mx + p$ appartient à I, la fonction f définie par $f(x) = g(mx + p)$ est dérivable et $f'(x) = m \times g'(mx + p)$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x + 8)^4$.
f est de la forme $f : x \mapsto g(mx + p)$ avec $g(x) = x^4$, $m = 5$ et $p = 8$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $g'(x) = 4x^3$.
On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = m \times g'(mx + p) = 5 \times 4 \times (5x + 8)^3 = 20(5x + 8)^3 .$$

Connaître le cours

2. Variations et courbes représentatives des fonctions

1. Lien entre sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

2. Lien entre extremums et dérivation

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de l'intervalle.

- f admet un maximum en a sur I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(a)$.

Le maximum vaut $f(a)$ et est atteint en a.

- f admet un minimum en a sur I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(a)$.

Le minimum vaut $f(a)$ et est atteint en a.

Remarque

Un extremum est un minimum ou un maximum.

Propriété

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I et qui n'est pas une borne de I.

Si la fonction f admet un extremum en a sur I alors $f'(a) = 0$.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse.

Exemple

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3$.

$f'(x) = 3x^2$. Donc $f'(0) = 0$. Mais f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc f n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$.

f admet un extremum : $f'(a) = 0$.	f admet un extremum en une borne de l'intervalle. f' peut ne jamais s'annuler.	$f'(a) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum.