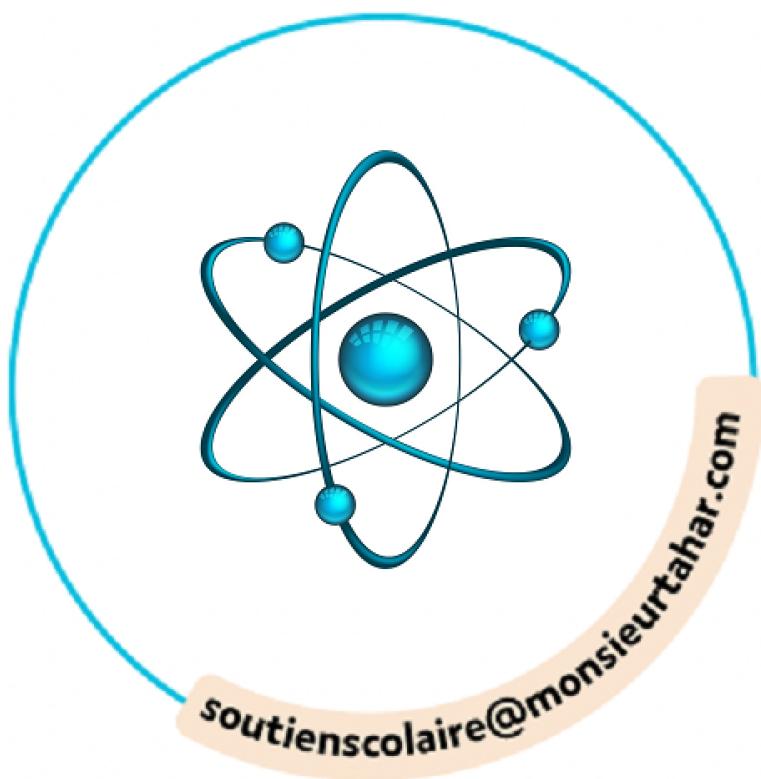
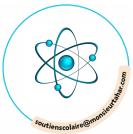


# MATHS



## CHAPITRE 4



## 1. Fonctions dérivables sur un intervalle

### 1. Définition de la dérivée d'une fonction

#### Définitions

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- On dit que  $f$  est **dérivable** sur  $I$  lorsque  $f$  admet un nombre dérivé pour tout réel  $x$  de  $I$ , noté  $f'(x)$ .
- On appelle **fonction dérivée** de  $f$  sur  $I$ , notée  $f'$ , la fonction définie sur  $I$  par  $f': x \mapsto f'(x)$ .

### 2. Fonction dérivée des fonctions de référence

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivation	Fonction dérivée
Fonction constante : $f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction affine : $f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Fonction carré : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Fonction puissance : $f(x) = x^n$ , entier naturel non nul	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$	$]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Fonction valeur absolue : $f(x) =  x $	$\mathbb{R}$	$]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x \in ]-\infty ; 0[ \\ 1 & \text{pour } x \in ]0 ; +\infty[ \end{cases}$

### 3. Opérations sur les fonctions dérivables

#### Théorème

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ .

- La fonction  $u + v$  est dérivable sur  $I$  et  $(u + v)' = u' + v'$ .
- Soit  $k$  un réel. La fonction  $ku$  est dérivable sur  $I$  et  $(ku)' = ku'$ .
- La fonction  $uv$  est dérivable sur  $I$  et  $(uv)' = u'v + uv'$ .
- Si la fonction  $u$  ne s'annule pas sur  $I$  alors la fonction  $\frac{1}{u}$  est dérivable sur  $I$  et  $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ .
- Si la fonction  $v$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors la fonction  $\frac{u}{v}$  est dérivable sur  $I$  et  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

#### Théorème (admis) : Dérivée de la fonction $f: x \mapsto g(mx + p)$

Soit  $g$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Pour tout  $x$  réel tel que  $mx + p$  appartient à  $I$ , la fonction  $f$  définie par  $f(x) = g(mx + p)$  est dérivable et  $f'(x) = m \times g'(mx + p)$ .

#### Exemple

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (5x + 8)^4$ .

$f$  est de la forme  $f: x \mapsto g(mx + p)$  avec  $g(x) = x^4$ ,  $m = 5$  et  $p = 8$ .  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $g'(x) = 4x^3$ .

On en déduit que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a :

$$f'(x) = m \times g'(mx + p) = 5 \times 4 \times (5x + 8)^3 = 20(5x + 8)^3.$$

## 2. Variations et courbes représentatives des fonctions

### 1. Lien entre sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée

#### Théorème (admis)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .
- $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$ .
- $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$ .

### 2. Lien entre extrema et dérivation

#### Définition

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a$  un réel de l'intervalle.

- $f$  admet un maximum en  $a$  sur  $I$  lorsque, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \leq f(a)$ .

Le maximum vaut  $f(a)$  et est atteint en  $a$ .

- $f$  admet un minimum en  $a$  sur  $I$  lorsque, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f(x) \geq f(a)$ .

Le minimum vaut  $f(a)$  et est atteint en  $a$ .

#### Remarque

Un extrémum est un minimum ou un maximum.

#### Propriété

Soient  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a$  un réel appartenant à  $I$  et qui n'est pas une borne de  $I$ .

Si la fonction  $f$  admet un extrémum en  $a$  sur  $I$  alors  $f'(a) = 0$ .

#### Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse.

#### Exemple

La fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = x^3$ .

$f'(x) = 3x^2$ . Donc  $f'(0) = 0$ . Mais  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  n'admet pas d'extrémum sur  $\mathbb{R}$ .

