MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 5

Connaître le cours

1. Définition et propriétés algébriques

1. La fonction exponentielle

Propriété et définition

Il existe une fonction f et une seule définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée exp : $x \longrightarrow \exp(x)$.

Remarque

L'existence de cette fonction est admise. Son unicité est démontrée p. 182.

2. Propriétés algébriques

Théorème (relation fonctionnelle)

Pour tous réels x et y, on a $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Remarque

Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Propriété

Pour tous réels x et y, on a :
- $\exp(-x) \times \exp(x) = 1$
- $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

3. Lien avec les suites géométriques

Propriété

Soit a un réel et (u_n) la suite de terme général $\exp(na)$ où n est un entier naturel.
- La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\exp(a)$.
- Pour tout entier n et tout réel a, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

4. Notation e^x

Définition et notation

Le nombre exp(1) est noté **e**.
Une valeur approchée de ce nombre au millième est **2,718**.

Remarque

D'après la propriété précédente avec $a = 1$, pour tout entier n, $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$.

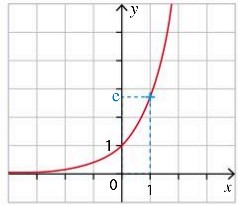
Notation

Par extension de la propriété précédente à l'ensemble des réels, on note :

pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

2. Étude de la fonction exponentielle

1. Signe et variation



Propriété

Pour tout réel x, $e^x > 0$.
La fonction exponentielle est strictement positive.

Propriété

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	↗	1	↗

Propriété

Pour tous réels a et b, on a :
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$

2. Propriétés algébriques

Propriétés

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.
- Pour tous réels x et y, on a : $e^x \times e^{-x} = 1$; $e^{x+y} = e^x \times e^y$; $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- Pour tout entier naturel n, $e^{nx} = (e^x)^n$.

3. Fonctions définies par $f(t) = e^{kt}$ et $g(t) = e^{-kt}$

Vocabulaire

De façon générale, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions $f(t) = e^{kt}$ ou $g(t) = e^{-kt}$, où k est un réel strictement positif, sont appelées **fonctions exponentielles**.

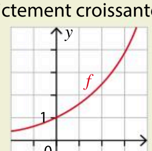
Propriété (admise)

Soient k un réel, et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{kt}$ et $g(t) = e^{-kt}$.
Pour tout réel t, $f'(t) = k \times f(t) = ke^{kt}$ et $g'(t) = -k \times g(t) = -ke^{-kt}$.

Propriété

Soit k un réel strictement positif.

- La fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{kt}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



- La fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{-kt}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.