MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 7

1. Produit scalaire

1. Définition du produit scalaire

Définition

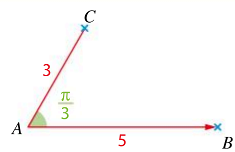
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, **noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$**, est le nombre réel défini par :

- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$;
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemples

Soient A, B et C trois points distincts tels que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{15}{2}$.



2. Vecteurs colinéaires et carré scalaire

Propriété

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et colinéaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ($\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^{\,2}$ et est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$).

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

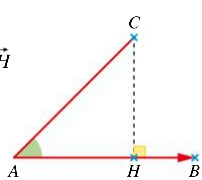
3. Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux

Propriété

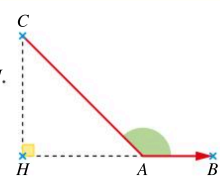
Soient trois points A, B et C (A et B distincts).
Si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

Remarque

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.
Si $\widehat{BAC} < \frac{\pi}{2}$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$.



Si $\widehat{BAC} > \frac{\pi}{2}$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.



Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété

Soient trois points A, B et C distincts.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

2. Propriétés du produit scalaire

1. Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un nombre réel.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Remarques

- Comme le produit scalaire est symétrique, on a aussi $(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}$ et $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
- Le produit scalaire est linéaire à gauche et à droite. On dit qu'il est **bilinéaire**.

Exemples

- $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{v}\cdot(-\vec{v})=-\vec{v}^{\,2}=-\|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u}\cdot(2\vec{u}+5\vec{v})=2\vec{u}^{\,2}+5\vec{u}\cdot\vec{v}=2\|\vec{u}\|^2+5\vec{u}\cdot\vec{v}$

2. Produit scalaire dans une base orthonormée

Propriétés

Dans une base orthonormée, soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$
- $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$

Exemples

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times 1+(-1)\times 3=-1$
- $\|\vec{u}\|^2=2^2+(-1)^2=5$, d'où $\|\vec{u}\|=\sqrt{5}$

3. Norme et produit scalaire

L'application des règles de calcul précédentes conduit aux produits scalaires remarquables ci-dessous.

Propriétés

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

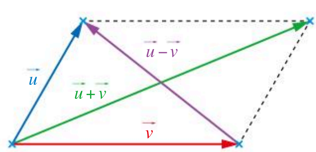
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

On en déduit ainsi d'autres expressions du produit scalaire à l'aide des normes.

Propriétés

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$



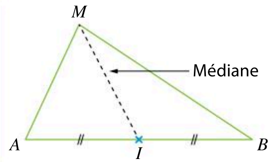
3. Applications du produit scalaire

1. Théorème de la médiane

Théorème

Soient deux points A et B du plan et I le milieu de $[AB]$.
Quel que soit le point M du plan, on a :

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$



Exemples

On considère un triangle MAB tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1{,}5$ et $AB = 4$.
La longueur de la médiane MI est alors obtenue à l'aide du théorème de la médiane :

$$MI^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} = -1{,}5 + \frac{4^2}{4} = \frac{5}{2}$$

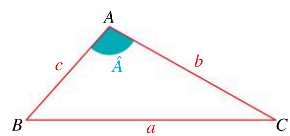
Et ainsi, $MI = \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

2. Formule d'Al-Kashi

Propriété

Dans un triangle ABC, avec les notations de la figure ci-contre, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}).$$



Remarque

On a de même $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$.

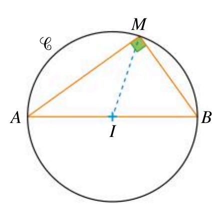
Exemple

On donne un triangle avec $a = 9$, $b = 7$ et $c = 4$.
La relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$ donne $\cos(\widehat{A}) = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{-2}{7}$.
La calculatrice permet alors d'obtenir, grâce à la touche $\cos^{-1}$ ou Arccos, une valeur approchée de l'angle, soit $\widehat{A} \approx 107°$.

3. Caractérisation du cercle

Propriété

Soient A, B et M trois points du plan.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.



Remarque

Cela revient à dire que l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.