MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 8

Connaître le cours

1. Vecteur normal à une droite

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Définition

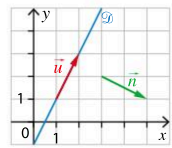
Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul du plan.
$\vec{n}$ est un **vecteur normal** à $\mathscr{D}$ lorsque $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

Exemple

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

En effet, $\vec{n} \cdot \vec{u} = -2 \times 1 + 1 \times 2 = 0$.
$\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.



Propriétés

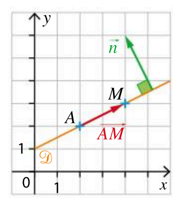
Soient $\mathscr{D}$ une droite et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.
- Tout vecteur normal à $\mathscr{D}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Exemple

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}$.
Les vecteurs $\vec{n}$ et $-2\vec{n}$ sont colinéaires, donc le vecteur $-2\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Propriété

Soient $\mathscr{D}$ une droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Un point M appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



Exemple

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $A(1\,;2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
Soit le point $B(4\,;3)$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (4-1) \times (-1) + (3-2) \times 3 = -3 + 3 = 0$
Le point B appartient donc à $\mathscr{D}$.

2. Équation cartésienne d'une droite

Propriété

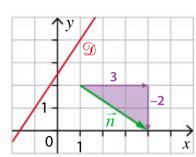
Soient a, b et c trois réels tels que a et b ne sont pas nuls simultanément.
Une droite $\mathscr{D}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ si et seulement si $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Exemple

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $3x - 2y + 5 = 0$.
On identifie les coefficients :

$$a = 3,\ b = -2 \text{ et } c = 5.$$

Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.



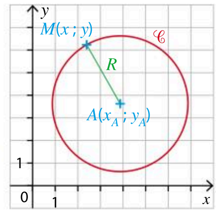
Connaître le cours

2. Équation cartésienne d'un cercle et d'une parabole

1. Équation cartésienne d'un cercle

Propriété et définition

Soient $A\,(x_A\,;y_A)$ un point du plan et R un réel strictement positif.
L'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ du plan vérifiant l'égalité
$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon R.
Cette égalité est une **équation cartésienne** du cercle $\mathscr{C}$.



Exemple

On considère l'équation $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.
Cette équation est équivalente à $(x - 3)^2 + (y - (-1))^2 = 4$.
C'est celle du cercle de centre $A\,(3\,;-1)$ et de rayon $R = \sqrt{4} = 2$ unités de longueur.

Remarque

Dans le cas où un cercle $\mathscr{C}$ est défini par la donnée d'un de ses diamètres $[AB]$, on peut trouver une équation cartésienne de $\mathscr{C}$:

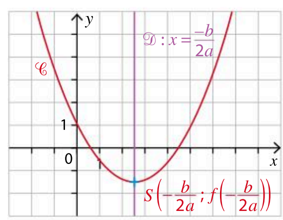
- en utilisant l'équivalence $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;
- ou en déterminant les coordonnées du centre I et la valeur du rayon qui est égal à la longueur AI.

2. Équation cartésienne d'une parabole

Définition et propriété

Soient a, b et c trois réels donnés tels que $a \neq 0$.
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie, pour tout réel x, par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
La courbe représentative de la fonction f, qui a pour équation $y = ax^2 + bx + c$, est une **parabole**.
Cette courbe admet :

- pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- pour sommet le point $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,;f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.



Exemple

On considère l'équation $y = -x^2 + 2x - 5$.
Cette équation est celle d'une parabole.
Par identification des coefficients, on obtient $a = -1$, $b = 2$ et $c = -5$.
D'après la propriété, cette parabole admet un axe de symétrie dont une équation est $x = -\dfrac{b}{2a}$, soit $x = -\dfrac{2}{2 \times (-1)}$, soit $x = 1$.
Son sommet S a :

- pour abscisse $x_S = -\dfrac{b}{2a} = 1$;
- pour ordonnée $y_S = -1^2 + 2 \times 1 - 5 = -1 + 2 - 5 = -4$.

Donc S a pour coordonnées $(1\,;-4)$.