MATHS

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 9

Connaître le cours

1. Probabilités conditionnelles

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.

1. Probabilité de B sachant A

Définition

Soient A et B deux évènements avec $P(\mathrm{A}) \neq 0$.
La probabilité que l'évènement B se réalise, sachant que l'évènement A est réalisé, est notée $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et définie par :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}.$$

Remarque

P_{A} (B) se lit « P de B sachant A ».

Exemples

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note A l'évènement « La couleur de la carte est rouge » et B l'évènement « La carte est un valet ». Les tirages étant équiprobables, on a les probabilités suivantes :

$P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$.

On a alors $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$.

Parmi les seize cartes rouges, il y a deux valets, la probabilité de tirer un valet sachant que la carte est rouge est donc bien $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

Par ailleurs $P(\mathrm{B}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, donc $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

Parmi les quatre valets, il y a deux cartes rouges, la probabilité de tirer une carte rouge sachant que la carte est un valet est donc bien $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. En particulier $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \neq P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

2. Propriétés

Propriétés

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

- $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$
- $P_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$

Exemples

À la montagne, 80 % des vacanciers pratiquent le ski alpin et 20 % la randonnée en raquettes.
60 % des skieurs et 50 % des marcheurs sont des hommes. On choisit un vacancier au hasard et on note S l'évènement « Le vacancier choisi pratique le ski » et H l'évènement « Le vacancier choisi est un homme ».

- $P(\mathrm{S} \cap \mathrm{H}) = P(\mathrm{S}) \times P_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$

La probabilité que le vacancier choisi soit un homme et qu'il pratique le ski est égale à 0,48.

- $P_{\mathrm{S}}(\overline{\mathrm{H}}) = 1 - P_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}) = 0{,}4$

Si l'on sait que le vacancier choisi pratique le ski, la probabilité que ce soit une femme est égale à 0,4.

Connaître le cours

2. Arbres pondérés

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.

1. Règles de calcul dans un arbre pondéré

Propriétés

Dans un arbre pondéré :

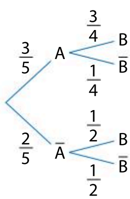
- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'évènement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

Remarque

Un chemin passant par un évènement A puis un évènement B correspond à l'intersection de ces deux évènements, soit $A \cap B$.

Exemple

Un footballeur tire successivement deux pénaltys. A est l'évènement « Il marque le premier pénalty » et B l'évènement « Il marque le second pénalty ».
On a représenté cette expérience aléatoire sur l'arbre ci-dessous.



$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$

La probabilité qu'il marque deux buts est égale à $\frac{9}{20}$.

$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

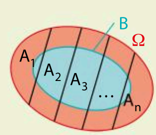
La probabilité qu'il marque seulement le deuxième pénalty est égale à $\frac{1}{5}$.

2. Formule des probabilités totales

Définition et propriété

Soient des évènements non vides $A_1, A_2, \dots, A_n$ de Ω, deux à deux disjoints et tels que leur réunion forme l'univers Ω.
Soit B un évènement.

- On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ constituent une **partition** de Ω.
- $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$



Remarques

- Les évènements A et $\bar{A}$ forment une partition de Ω. On a donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.
- Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un évènement correspondant à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités des chemins correspondant à cet évènement.

Exemple

Dans l'exemple précédent, la formule des probabilités totales donne :

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{9}{20} + \frac{1}{5} = \frac{13}{20}$.

3. Indépendance

P est une loi de probabilité définie sur un univers Ω.

1. Évènements indépendants

Définition

On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$.

Propriété

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P_{\text{B}}(\text{A}) = P(\text{A}) \Leftrightarrow P_{\text{A}}(\text{B}) = P(\text{B})$.

Remarques

- $P_{\text{B}}(\text{A}) = P(\text{A})$ signifie que la réalisation ou non de l'évènement B n'a pas d'influence sur la réalisation de l'évènement A.
- Il ne faut pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles. Deux évènements sont incompatibles lorsque $P(\text{A} \cap \text{B}) = 0$, ce qui signifie que les évènements A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Propriété

Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\overline{\text{A}}$ et B sont indépendants.

Remarque

Si A et B sont deux évènements indépendants, alors A et $\overline{\text{B}}$ sont aussi indépendants, ainsi que $\overline{\text{A}}$ et $\overline{\text{B}}$.

2. Succession de deux épreuves indépendantes

Définition

Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une **succession de deux épreuves indépendantes**.

Exemples

On tire au hasard successivement deux cartes dans un jeu de cartes et on note les deux cartes obtenues.
Dans l'hypothèse où l'on remet la carte tirée dans le paquet, les deux tirages sont indépendants.
Sinon le contenu du paquet après le premier tirage dépend de la carte tirée en premier et les deux tirages ne sont pas indépendants.

Propriété (admise)

Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'entre eux.

Exemple

On lance successivement deux fois un dé cubique non truqué. Il s'agit d'une succession de deux épreuves indépendantes, et la probabilité d'obtenir deux fois le numéro 6 est égale à $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.