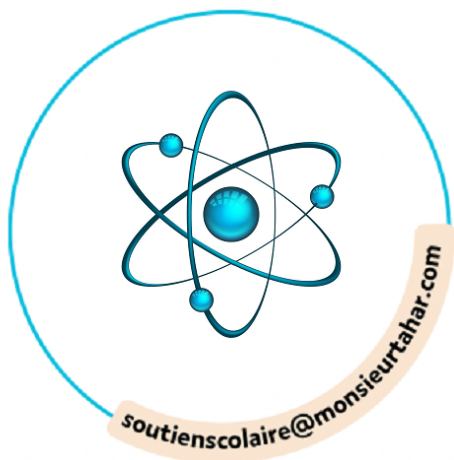


ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE



PHYSIQUE - CHIMIE

CHAPITRE 6

Le modèle linéaire appliqué à la démographie



Une population évolue de manière linéaire si elle varie d'une quantité quasi-constante d'un palier au suivant.

I Le modèle linéaire

On considère une **grandeur discrète**, par exemple le nombre d'individus d'une population. Sa valeur initiale (au début de l'étude) est notée $u(0)$; n étant un entier naturel. On note ensuite $u(n)$ la valeur au palier n , c'est-à-dire après n unités de temps (années, mois, jours, etc.).

On dit que la grandeur **varie de manière linéaire** si et seulement si sa **variation absolue** $u(n+1) - u(n)$ est **constante**, c'est-à-dire indépendante de la valeur de l'entier n .

La suite de terme général $u(n)$ est une **suite arithmétique** ; on passe d'un terme au suivant en ajoutant un nombre fixe r – la **raison** – positif ou négatif ; cette raison est la **constante** $r = u(n+1) - u(n)$.

On dit aussi que les nombres $u(n)$ sont en **progression arithmétique**.

Pour tout entier naturel n , on a : $u(n) = u(0) + n \times r$. Si f est la fonction telle que, pour tout entier naturel n , $u(n) = f(n)$, alors f est une **fonction affine**.

• Si $r > 0$, la suite de terme général $u(n)$ est croissante.

La grandeur **augmente** au cours du temps.

• Si $r = 0$, la suite de terme général $u(n)$ est constante.

La grandeur est **constante**, elle ne varie pas au cours du temps.

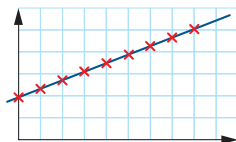
• Si $r < 0$, la suite de terme général $u(n)$ est décroissante.

La grandeur **diminue** au cours du temps.

La **représentation graphique** de la suite, dans un repère $\mathcal{R}$ du plan, est l'ensemble des points de coordonnées $(n ; u(n))$. Ces points appartiennent à la droite représentant la fonction f , ils sont donc **alignés**.

Mots clés

- Une **grandeur discrète** est une grandeur mesurée à des intervalles de temps réguliers, et non de manière continue.
- La **variation absolue** est la différence des valeurs prises à deux paliers successifs.

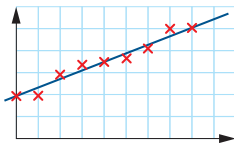


II La modélisation de l'évolution d'une population

1 L'ajustement d'un nuage de points

Pour une grandeur dont la variation absolue est presque constante, c'est-à-dire ne connaît pas de différences importantes d'un palier au suivant, les points du nuage qui représente son évolution sont presque alignés.

On peut **ajuster** ce nuage par une droite. Mais le modèle linéaire est inadapté pour des grandeurs dont la variation absolue change fortement d'un palier au suivant.



À noter

On « approxime » le nuage de points par une droite : on parle d'**ajustement affine**.

2 Les méthodes pour établir une droite d'ajustement

Il existe différentes méthodes pour déterminer une **droite d'ajustement** passant au plus près des points du nuage.

Les deux méthodes les plus utilisées sont les suivantes.

- **La méthode de Mayer** (xviii^e siècle) : les points du nuage sont partagés, par ordre d'abscisses croissantes, en deux sous-groupes de même effectif ; la droite de Mayer passe par les points moyens des deux sous-nuages ainsi définis.

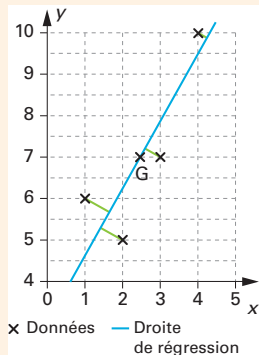
- **La méthode des moindres carrés**, élaborée par **Legendre** et **Gauss** (xix^e siècle) : on détermine la droite telle que la somme des carrés des distances de chaque point du nuage au point de la droite de même abscisse soit minimale. On montre que cette droite est unique et qu'elle passe par le point moyen du nuage ; on l'appelle **droite de régression de y en x**.



ZOOM

La projection orthogonale sur une droite

On peut aussi déterminer la droite telle que la somme des carrés des distances des points du nuage à la droite soit minimale. On montre qu'une telle droite existe et est unique, et qu'elle passe par le point moyen G du nuage. On parle alors de **régression orthogonale**. En effet, la distance d'un point à une droite est la distance de ce point à son projeté orthogonal sur la droite.



Le modèle exponentiel appliqué à la démographie



Une population évolue de manière exponentielle si son taux de variation entre deux paliers successifs est constant ou presque.

I Le modèle exponentiel

On considère, comme précédemment, une grandeur discrète de valeur initiale $u(0)$; n étant un entier naturel, on note également $u(n)$ la valeur au palier n .

On dit que la grandeur varie de manière **exponentielle** si et seulement si sa **variation absolue** $u(n+1) - u(n)$ est **proportionnelle** à sa **valeur courante** $u(n)$ (sa valeur au palier n).

Une grandeur varie **de manière exponentielle** si et seulement si son taux de variation est **constant**, égal au pourcentage d'évolution (positif ou négatif) entre deux paliers successifs.

Alors le **quotient** $\frac{u(n+1)}{u(n)}$ des valeurs à deux paliers successifs est lui aussi **constant**, indépendant du palier n . On le note q . C'est un nombre positif. La suite de terme général $u(n)$ est une **suite géométrique**, on passe d'un terme au suivant en multipliant par le nombre q supérieur ou inférieur à 1. q est la **raison** de la suite.

Mot clé

Le nombre qui permet, par multiplication, de passer d'un terme au suivant dans une suite géométrique se nomme **raison**.

On dit aussi que les nombres $u(n)$ sont en **progression géométrique**.

Pour tout entier naturel n , on a : $u(n) = u(0) \times q^n$.

Si la grandeur augmente de t % par palier, alors $q = 1 + \frac{t}{100}$ et $q > 1$.

Si elle diminue de t % par palier, alors $q = 1 - \frac{t}{100}$ et $q < 1$.

- Si $q > 1$, la suite de terme général $u(n)$ est croissante.
 - La grandeur **augmente** au cours du temps.
 - Si $q = 1$, la suite de terme général $u(n)$ est constante.
 - La grandeur est **constante**, elle ne varie pas au cours du temps.
 - Si $q < 1$, la suite de terme général $u(n)$ est décroissante.
- La grandeur **diminue** au cours du temps.

Les points du nuage appartiennent à la courbe représentative d'une **fonction exponentielle**. Dans la réalité, pour une population dont le taux de variation est presque constant d'un palier au suivant, le nuage de points peut être ajusté par une courbe conforme au modèle exponentiel.



II Le modèle de Malthus

L'économiste britannique Thomas Malthus affirme, vers la fin du XVIII^e siècle, qu'une population s'accroît géométriquement, c'est-à-dire en suivant un **modèle exponentiel**, si elle n'est pas freinée.

Si on note $P(n)$ la population au palier n , sa croissance se traduit par une relation du type $P(n+1) = \lambda P(n)$, où λ , appelé **paramètre malthusien**, dépend du rapport entre le **taux de natalité** (rapport du nombre de naissances à la population totale) et le **taux de mortalité** (rapport du nombre de morts à la population totale), que Malthus suppose **constants**.

En parallèle, il prédit mathématiquement que l'**accroissement des ressources** indispensables à la survie de la population suit un **modèle linéaire**, c'est-à-dire qu'elles croissent de façon arithmétique. Cette croissance étant bien plus lente que celle de la population, il en déduit le caractère inévitable de catastrophes démographiques, à moins de limiter la croissance de la population.



La catastrophe des rennes de l'île Saint-Mathieu

En 1944, 29 rennes sont introduits sur l'île Saint-Mathieu, située dans la mer de Béring entre Alaska et Russie Orientale, sans prédateur et riche en lichen dont se nourrissent les rennes.



- En 1957, on y comptait 1 350 rennes, puis 6 000 en 1963. En 1966, il n'en restait que 42.
- On a conclu à une « catastrophe malthusienne » : la population des rennes s'est accrue au-delà de ce que les ressources disponibles pouvaient soutenir, puis s'est brutalement effondrée.

L'évolution des modèles démographiques



Le choix d'un modèle passe notamment par la confrontation des résultats « théoriques » aux observations concrètes. Dans le cadre du monde du vivant, extrêmement variable, la tâche est complexe.

I Les limites du modèle de Malthus



Le modèle de Malthus n'est pas adapté à toutes les situations, en particulier quand il s'agit d'étudier les populations humaines. Considérant que la population est isolée, ne tenant pas compte d'éventuels **facteurs extérieurs** (migrations, guerres, épidémies, etc.), ni de la capacité de l'être humain à améliorer sa **productivité**, il n'est généralement **valide** que sur le **court terme**.

Par ailleurs, même si le milieu contient les ressources nécessaires, une population ne peut pas augmenter exponentiellement jusqu'à l'infini. Des phénomènes d'**autorégulation** se mettent en place.

Une population dite « normale » a accès à ce dont elle a besoin pour vivre (nourriture notamment). On fait alors l'hypothèse que la diminution du taux de croissance de la population (son affaiblissement) est proportionnelle à la population surabondante (au-delà de la population normale). Cela conduit à l'élaboration du modèle logistique de Verhulst.

II Le modèle logistique de Verhulst



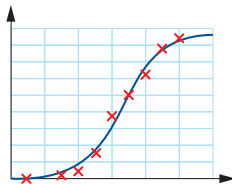
Précurseur des études démographiques, **Adolphe Quetelet** considère que la loi d'accroissement d'une population est une loi physique : la somme des obstacles à l'accroissement d'une population est proportionnelle au carré de la vitesse à laquelle cette population tend à croître.

Vers 1840, sous l'impulsion de Quetelet, le mathématicien **Pierre-François Verhulst** s'intéresse à son tour à la « théorie de la population » ; il prend comme bases les intuitions de Malthus, et applique des correctifs, prenant en compte la limitation de la population.

Verhulst considère que plus une **population augmente**, plus son taux de **natalité diminue** et plus son taux de **mortalité augmente**. Selon lui, pour chaque population, il existe une **taille limite** (liée à la **capacité d'accueil du milieu**), en deçà de laquelle on doit rester pour une cohabitation « harmonieuse » avec l'écosystème. Il affirme que, quelle que soit sa valeur d'origine, la population tend vers cette « taille limite ».

■ Le modèle logistique d'évolution d'une population de Verhulst peut être représenté par une courbe en S (courbe sigmoïde).

■ Conscient des limites de son modèle, Verhulst pose comme principe que toutes les lois que l'on peut poser doivent admettre un maximum.



III Les évolutions actuelles des modèles

1 Les modèles « structurés en âges »

Les modèles de Malthus et de Verhulst supposent un taux de reproduction (différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité) identique pour tous les individus.

Ce taux dépend en réalité de l'âge des individus. Le **modèle de Leslie** (1900-1972) tient compte de cette structuration de la population ; il utilise des **matrices**.

Mot clé

Une **matrice** est un tableau de nombres permettant d'effectuer des calculs.

2 Des modèles de plus en plus élaborés

Des modèles encore plus élaborés prennent en compte d'autres paramètres, comme les limites environnementales (épuisement des ressources non renouvelables par exemple). Le développement de l'informatique a favorisé la création de modèles basés sur des calculs complexes. Certains modèles prévoient que la population mondiale atteindra environ 10 milliards d'êtres humains en 2050.



ZOOM

Le modèle AquaCrop et la gestion de l'eau

AquaCrop est un modèle de simulation de croissance des cultures développé depuis 2009 par la FAO (Food and Agriculture Organization, agence de l'ONU). Il permet notamment d'optimiser l'irrigation des parcelles cultivées en cas de pénurie d'eau.

