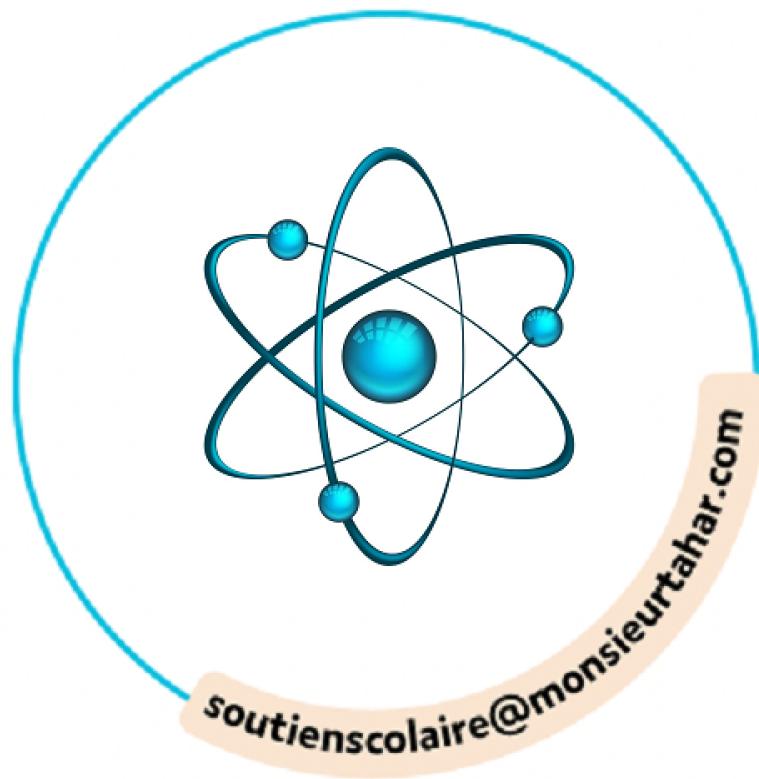
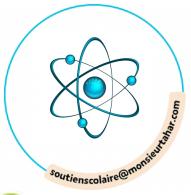


MATHEMATIQUES



CHAPITRE 1



1. Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes

1. Forme algébrique d'un nombre complexe

Théorème (admis)

Il existe un ensemble \mathbb{C} , appelé ensemble des nombres complexes, contenant \mathbb{R} et vérifiant :

- l'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes ;
- il existe un nombre dans \mathbb{C} , noté i , tel que $i^2 = -1$;
- tout élément de \mathbb{C} s'écrit de manière unique $z = x + iy$ (où x et y sont réels) ;
- le nombre 0 s'écrit $0 + i0$.

Définition

L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .

- x est la partie réelle de z , notée $Re(z)$.
- y est la partie imaginaire de z , notée $Im(z)$.

Exemple

On pose $z = 5 + 3i$ et $z' = 2 - 7i$, on cherche $Re(z+z')$ et $Im(z \times z')$.

- $z+z' = (5+3i)-(2-7i) = 5+3i-2+7i = 5-2+3i+7i = 3+10i$.
- $z \times z' = (5+3i) \times (2-7i) = 10-35i+6i-21i^2 = 10-29i-21 \times (-1) = 31-29i$.

Et par conséquent : $Re(z+z') = 3$ et $Im(z \times z') = -29$.

2. La division dans \mathbb{C}

Propriété

Tout nombre complexe non nul z admet un unique inverse, noté $\frac{1}{z}$.

Technique Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient dans \mathbb{C} , on multiplie le numérateur et le dénominateur du quotient par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple

L'inverse de $3+2i$ est $\frac{1}{3+2i} = \frac{1 \times (3-2i)}{(3+2i) \times (3-2i)} = \frac{3-2i}{9-(2i)^2} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$.

3. Conjugué

Définition

On appelle **conjugué** d'un nombre complexe z le nombre complexe noté \bar{z} ayant même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée, c'est-à-dire si $z = x + iy$, alors $\bar{z} = x - iy$.

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes.

- a. $\bar{\bar{z}} = z$
- b. $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- c. $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- d. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
- e. si $z \neq 0$, $\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

Exemple

Le conjugué de $(5+3i) \times (2-7i)$ est

$$(5+3i) \times (2-7i) = (\overline{5+3i}) \times (\overline{2-7i}) = (5-3i) \times (2+7i) = 10 + 35i - 6i + 21 = 31 + 29i.$$



Exercice résolu | 1 Calculer dans \mathbb{C}

On pose $z = 2+i$ et $z' = 3-2i$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

- 1** $4z - 3iz'$ **2** $z \times z'$ **3** $(z')^2$

Solution commentée

Les techniques opératoires valables pour les réels se prolongent à l'ensemble des nombres complexes : distributivité et identités remarquables s'appliquent et $i^2 = -1$

- 1** $4z - 3iz' = 4(2+i) - 3i(3-2i) = 8+4i - 9i + 6i^2 = 2-5i.$
- 2** $z \times z' = (2+i)(3-2i) = 6-4i+3i-2i^2 = 8-i.$
- 3** $(z')^2 = (3-2i)^2 = 9 - 2 \times 3 \times 2i + (2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i.$

Exercice résolu | 2 Utiliser le conjugué

Écrire sous forme algébrique, le conjugué des nombres complexes suivants.

- 1** $-2+3i$ **2** $i(2-5i)$ **3** $\frac{1-i}{2i}$

Solution commentée

1 $\overline{-2+3i} = -2-3i.$

2 $\overline{i(2-5i)} = \overline{i} \times \overline{(2-5i)} = -i \times (2+5i) = -2i - 5i^2 = 5-2i.$ Il est possible aussi de déterminer la forme algébrique du nombre complexe, puis d'en prendre ensuite le conjugué : $i(2-5i) = 2i - 5i^2 = 5+2i$ et donc $\overline{i(2-5i)} = 5-2i.$

3 $\overline{\left(\frac{1-i}{2i}\right)} = \overline{\frac{1-i}{2i}} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{(1+i) \times i}{-2i \times i} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i.$

Il est possible aussi de déterminer la forme algébrique du nombre complexe, puis d'en prendre ensuite le conjugué : $\frac{1-i}{2i} = \frac{(1-i) \times i}{-2i \times i} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i$ et donc $\overline{\left(\frac{1-i}{2i}\right)} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i.$

Exercice résolu | 3 Quotient dans \mathbb{C}

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

- 1** $z = \frac{2+i}{3-2i}$ **2** $z' = \frac{1-i}{1+i}$

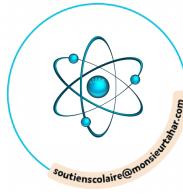
Solution commentée

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur pour faire apparaître l'identité remarquable $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

- 1** Pour $z = \frac{2+i}{3-2i}$, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de $3-2i$, c'est-à-dire par $3+2i$.

$$z = \frac{2+i}{3-2i} = \frac{(2+i) \times (3+2i)}{(3-2i) \times (3+2i)} = \frac{6+4i+3i-2}{3^2-(2i)^2} = \frac{4}{13} + i\frac{7}{13}.$$
- 2** Pour $z' = \frac{1-i}{1+i}$, on multiplie à nouveau numérateur et dénominateur par le conjugué de $1+i$, c'est-à-dire par $1-i$.

$$z' = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1^2+1^2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$



2. Techniques opératoires

1. Nombres réels, nombres imaginaires purs

Définition

- $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$, on dit alors que z est réel.
- $\text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$, on dit alors que z est imaginaire pur.

2. La formule du binôme de Newton

Propriété

DEMO
p. 14

Quels que soient les nombres complexes a et b , on a : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
Cette formule porte le nom de **binôme de Newton**.

Remarque

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux. Ils se calculent avec le triangle de Pascal.

Exemple

$$(1+i)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} 1^k i^{3-k} = \binom{3}{0} 1^0 i^{3-0} + \binom{3}{1} 1^1 i^{3-1} + \binom{3}{2} 1^2 i^{3-2} + \binom{3}{3} 1^3 i^{3-3} \\ = i^3 + 3i^2 + 3i + 1 = -i - 3 + 3i + 1 = -2 + 2i.$$

3. Équations dans \mathbb{C}

DEMO
en ligne

Propriété

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Technique 1

La résolution d'équation du premier degré dans \mathbb{C} repose sur la même pratique qu'avec les nombres réels. On cherche à isoler l'inconnue.

Exemple

$$3z + 5i = 4iz + 2 \Leftrightarrow (3 - 4i)z = 2 - 5i \Leftrightarrow z = \frac{2 - 5i}{3 - 4i}.$$

$$\text{On donne la réponse sous forme algébrique : } z = \frac{2 - 5i}{3 - 4i} = \frac{(2 - 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{26 - 7i}{25}. S = \left\{ \frac{26}{25} - \frac{7}{25}i \right\}.$$

Technique 2

Soit $z = a + ib$ avec a et b deux réels. Il est possible de chercher la partie réelle a et la partie imaginaire b de z .

L'équation précédente $3z + 5i = 4iz + 2$ s'écrit alors $3(a + ib) + 5i = 4i(a + ib) + 2$.

On obtient après calculs $3a + i(3b + 5) = -4b + 2 + 4ai$.

Et en identifiant partie réelle et partie imaginaire des membres de gauche et de droite, on obtient pour les parties réelles : $3a = -4b + 2$ et pour les parties imaginaires : $3b + 5 = 4a$.

$$\text{On aboutit à un système } \begin{cases} 3a + 4b = 2 \\ 4a - 3b = 5 \end{cases} \text{ qui a pour solution } \begin{cases} a = \frac{26}{25} \\ b = -\frac{7}{25} \end{cases} \text{ et donc } S = \left\{ \frac{26}{25} - \frac{7}{25}i \right\}.$$

Remarque

L'usage de la technique 2 est incontournable lorsque l'équation comporte l'inconnue et son conjugué comme par exemple $z + 2\bar{z} = 3 - 4i$.



Exercice résolu | 1 Caractériser les nombres réels et les nombres imaginaires purs

Déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^2 - \bar{z}$ soit un nombre réel.

▼ Solution commentée

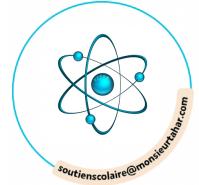
Méthode 1 : $z^2 - \bar{z}$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

On pose $z = a + ib$, avec a et b deux réels. On obtient $z^2 - \bar{z} = a^2 - b^2 - a + i(2ab + b)$.

Ainsi $\text{Im}(z^2 - \bar{z}) = 2ab + b = b(2a + 1)$.

On a alors : $z^2 - \bar{z}$ réel équivaut à $b(2a + 1) = 0$, ce qui équivaut à $b = 0$ ou $a = -0,5$.

$S = \{a + 0i \text{ avec } a \in \mathbb{R}\} \cup \{-0,5 + bi \text{ avec } b \in \mathbb{R}\}$



Méthode 2 : $z^2 - \bar{z}$ est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué.

Le conjugué de $z^2 - \bar{z}$ s'écrit : $z^2 - \bar{z} = z^2 - \bar{z} = (\bar{z})^2 - z$

Ainsi, $z^2 - \bar{z}$ est réel $\Leftrightarrow z^2 - \bar{z} = (\bar{z})^2 - z \Leftrightarrow (\bar{z})^2 - z^2 + \bar{z} - z = 0 \Leftrightarrow (\bar{z} - z)(\bar{z} + z) + \bar{z} - z = 0$

$\Leftrightarrow (\bar{z} - z)(\bar{z} + z + 1) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} + z = 0 \text{ ou } \bar{z} + z = -1 \Leftrightarrow z \text{ réel ou } \text{Re}(z) = -0,5$

$S = \{a + 0i \text{ avec } a \in \mathbb{R}\} \cup \{-0,5 + bi \text{ avec } b \in \mathbb{R}\}$

Exercice résolu | 2 Résoudre des équations du 1^{er} degré

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante avec la technique 1 du cours.

$$3z + 1 - 2i = 4 - 3i - 2iz$$

▼ Solution commentée

$$3z + 1 - 2i = 4 - 3i - 2iz \Leftrightarrow (2 + 2i)z = 3 - i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3-i}{2+2i} \text{ (on multiplie numérateur et dénominateur par } 2-2i)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(3-i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4-8i}{8}, \text{ donc } S = \{0,5 - i\}.$$

Exercice résolu | 3 Résoudre des équations faisant intervenir une inconnue et son conjugué

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes avec la technique 2 du cours.

$$1 \quad z + 2\bar{z} = 3 - 4i$$

$$2 \quad z^2 = z \times \bar{z}$$

▼ Solution commentée

1 On écrit z sous la forme $a + ib$.

$$z + 2\bar{z} = 3 - 4i \Leftrightarrow a + ib + 2(a - ib) = 3 - 4i \Leftrightarrow 3a - ib = 3 - 4i$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a alors $3a = 3$ et $-b = -4$, d'où $a = 1$ et $b = 4$.

Ainsi $S = \{1 + 4i\}$.

2 On écrit z sous la forme $a + ib$.

$$z^2 = z \times \bar{z} \Leftrightarrow (a + ib)^2 = (a + ib) \times (a - ib) \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = a^2 - (ib)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = a^2 + b^2$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a alors $a^2 - b^2 = a^2 + b^2$ et $2ab = 0$, c'est-à-dire $b^2 = 0$ et $ab = 0$, donc $S = \{a + 0i \text{ avec } a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.