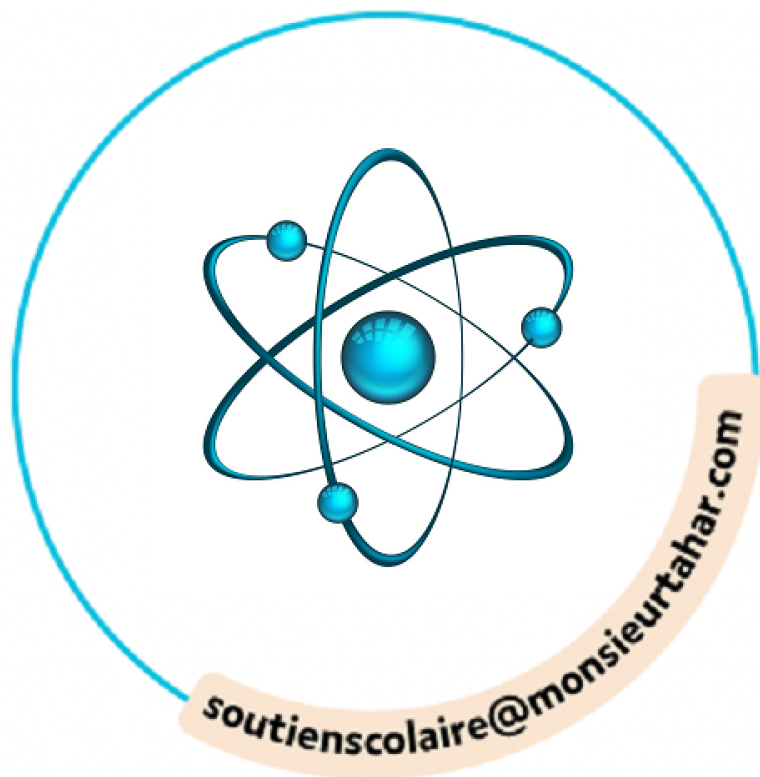
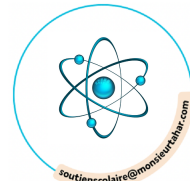


# MATHEMATIQUES



## CHAPITRE 1



# 1. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

## 1. Forme algébrique d'un nombre complexe

### Théorème (admis)

- Il existe un ensemble  $\mathbb{C}$ , appelé ensemble des nombres complexes, contenant  $\mathbb{R}$  et vérifiant :
- l'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes ;
  - il existe un nombre dans  $\mathbb{C}$ , noté  $i$ , tel que  $i^2 = -1$  ;
  - tout élément de  $\mathbb{C}$  s'écrit de manière unique  $z = x + iy$  (où  $x$  et  $y$  sont réels) ;
  - le nombre 0 s'écrit  $0 + i0$ .

### Définition

L'écriture  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels est appelée **forme algébrique** du nombre complexe  $z$ .

- $x$  est la partie réelle de  $z$ , notée  $Re(z)$ .
- $y$  est la partie imaginaire de  $z$ , notée  $Im(z)$ .

### Exemple

On pose  $z = 5 + 3i$  et  $z' = 2 - 7i$ , on cherche  $Re(z + z')$  et  $Im(z \times z')$ .

- $z + z' = (5 + 3i) + (2 - 7i) = 5 + 3i + 2 - 7i = 7 - 4i = 7 + (-4)i$ .
- $z \times z' = (5 + 3i) \times (2 - 7i) = 10 - 35i + 6i - 21i^2 = 10 - 29i - 21 \times (-1) = 10 - 29i + 21 = 31 - 29i$ .

Et par conséquent :  $Re(z + z') = 7$  et  $Im(z \times z') = -29$ .

## 2. La division dans $\mathbb{C}$

### Propriété

Tout nombre complexe non nul  $z$  admet un unique inverse, noté  $\frac{1}{z}$ .

**Technique** Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient dans  $\mathbb{C}$ , on multiplie le numérateur et le dénominateur du quotient par l'expression conjuguée du dénominateur.

### Exemple

L'inverse de  $3 + 2i$  est  $\frac{1}{3 + 2i} = \frac{1 \times (3 - 2i)}{(3 + 2i) \times (3 - 2i)} = \frac{3 - 2i}{9 - (2i)^2} = \frac{3 - 2i}{9 - (-4)} = \frac{3 - 2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ .

## 3. Conjugué

### Définition

On appelle **conjugué** d'un nombre complexe  $z$  le nombre complexe noté  $\bar{z}$  ayant même partie réelle que  $z$  et une partie imaginaire opposée, c'est-à-dire si  $z = x + iy$ , alors  $\bar{z} = x - iy$ .

### Propriétés

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes.

- a.  $\bar{\bar{z}} = z$     b.  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$     c.  $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$     d.  $\overline{z^n} = \bar{z}^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$     e. si  $z \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$  et  $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

### Exemple

Le conjugué de  $(5 + 3i) \times (2 - 7i)$  est  $\overline{(5 + 3i) \times (2 - 7i)} = \overline{(5 + 3i)} \times \overline{(2 - 7i)} = (5 - 3i) \times (2 + 7i) = 10 + 35i - 6i + 21 = 31 + 29i$ .

**Exercice résolu 1 Calculer dans  $\mathbb{C}$** 

On pose  $z = 2 + i$  et  $z' = 3 - 2i$ . Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

- 1  $4z - 3iz'$       2  $z \times z'$       3  $(z')^2$

**✓ Solution commentée**

Les techniques opératoires valables pour les réels se prolongent à l'ensemble des nombres complexes : distributivité et identités remarquables s'appliquent et  $i^2 = -1$

- 1  $4z - 3iz' = 4(2 + i) - 3i(3 - 2i) = 8 + 4i - 9i + 6i^2 = 2 - 5i.$   
 2  $z \times z' = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 8 - i.$   
 3  $(z')^2 = (3 - 2i)^2 = 9 - 2 \times 3 \times 2i + (2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i.$

**Exercice résolu 2 Utiliser le conjugué**

Écrire sous forme algébrique, le conjugué des nombres complexes suivants.

- 1  $-2 + 3i$       2  $i(2 - 5i)$       3  $\frac{1-i}{2i}$

**✓ Solution commentée**

- 1  $\overline{-2 + 3i} = -2 - 3i.$   
 2  $\overline{i(2 - 5i)} = \bar{i} \times \overline{(2 - 5i)} = -i \times (2 + 5i) = -2i - 5i^2 = 5 - 2i.$  Il est possible aussi de déterminer la forme algébrique du nombre complexe, puis d'en prendre ensuite le conjugué :  $i(2 - 5i) = 2i - 5i^2 = 5 + 2i$  et donc  $\overline{i(2 - 5i)} = 5 - 2i.$   
 3  $\overline{\left(\frac{1-i}{2i}\right)} = \frac{\overline{1-i}}{\overline{2i}} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{(1+i) \times i}{-2i \times i} = \frac{-1 + i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$

Il est possible aussi de déterminer la forme algébrique du nombre complexe, puis d'en prendre ensuite le conjugué :  $\frac{1-i}{2i} = \frac{(1-i) \times i}{-2i \times i} = \frac{-1 + i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  et donc  $\overline{\left(\frac{1-i}{2i}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$

**Exercice résolu 3 Quotient dans  $\mathbb{C}$** 

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

- 1  $z = \frac{2+i}{3-2i}$       2  $z' = \frac{1-i}{1+i}$

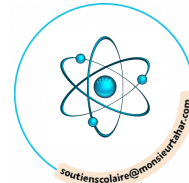
**✓ Solution commentée**

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur pour faire apparaître l'identité remarquable  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .

- 1 Pour  $z = \frac{2+i}{3-2i}$ , on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de  $3 - 2i$ , c'est-à-dire par  $3 + 2i$ .  

$$z = \frac{2+i}{3-2i} = \frac{(2+i) \times (3+2i)}{(3-2i) \times (3+2i)} = \frac{6 + 4i + 3i - 2}{3^2 - (2i)^2} = \frac{4 + 7i}{13} = \frac{4}{13} + i\frac{7}{13}.$$
  
 2 Pour  $z' = \frac{1-i}{1+i}$ , on multiplie à nouveau numérateur et dénominateur par le conjugué de  $1 + i$ , c'est-à-dire par  $1 - i$ .  

$$z' = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1^2 + 1^2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$



## 2. Techniques opératoires

### 1. Nombres réels, nombres imaginaires purs

#### Définition

- $Im(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ , on dit alors que  $z$  est réel.
- $Re(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ , on dit alors que  $z$  est imaginaire pur.

### 2. La formule du binôme de Newton

#### Propriété

Quels que soient les nombres complexes  $a$  et  $b$ , on a :  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .  
Cette formule porte le nom de **binôme de Newton**.

#### Remarque

Les nombres  $\binom{n}{k}$  sont les coefficients binomiaux. Ils se calculent avec le triangle de Pascal.

#### ✓ Exemple

$$(1+i)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} 1^k i^{3-k} = \binom{3}{0} 1^0 i^{3-0} + \binom{3}{1} 1^1 i^{3-1} + \binom{3}{2} 1^2 i^{3-2} + \binom{3}{3} 1^3 i^{3-3}$$

$$= i^3 + 3i^2 + 3i + 1 = -i - 3 + 3i + 1 = -2 + 2i.$$

### 3. Équations dans $\mathbb{C}$

#### Propriété

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

#### Technique 1

La résolution d'équation du premier degré dans  $\mathbb{C}$  repose sur la même pratique qu'avec les nombres réels. On cherche à isoler l'inconnue.

#### ✓ Exemple

$$3z + 5i = 4iz + 2 \Leftrightarrow (3 - 4i)z = 2 - 5i \Leftrightarrow z = \frac{2 - 5i}{3 - 4i}.$$

$$\text{On donne la réponse sous forme algébrique : } z = \frac{2 - 5i}{3 - 4i} = \frac{(2 - 5i) \times (3 + 4i)}{(3 - 4i) \times (3 + 4i)} = \frac{26 - 7i}{25}. S = \left\{ \frac{26}{25} - \frac{7}{25}i \right\}.$$

#### Technique 2

Soit  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  deux réels. Il est possible de chercher la partie réelle  $a$  et la partie imaginaire  $b$  de  $z$ .

L'équation précédente  $3z + 5i = 4iz + 2$  s'écrit alors  $3 \times (a + ib) + 5i = 4i \times (a + ib) + 2$ .

On obtient après calculs  $3a + i(3b + 5) = -4b + 2 + 4ai$ .

Et en identifiant partie réelle et partie imaginaire des membres de gauche et de droite, on obtient pour les parties réelles :  $3a = -4b + 2$  et pour les parties imaginaires :  $3b + 5 = 4a$ .

$$\text{On aboutit à un système } \begin{cases} 3a + 4b = 2 \\ 4a - 3b = 5 \end{cases} \text{ qui a pour solution } \begin{cases} a = \frac{26}{25} \\ b = -\frac{7}{25} \end{cases} \text{ et donc } S = \left\{ \frac{26}{25} - \frac{7}{25}i \right\}.$$

#### Remarque

L'usage de la technique 2 est incontournable lorsque l'équation comporte l'inconnue et son conjugué comme par exemple  $z + 2\bar{z} = 3 - 4i$ .



**Exercice résolu 1** Caractériser les nombres réels et les nombres imaginaires purs

Déterminer tous les nombres complexes  $z$  tels que  $z^2 - \bar{z}$  soit un nombre réel.

**✓ Solution commentée**

**Méthode 1 :**  $z^2 - \bar{z}$  est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

On pose  $z = a + ib$ , avec  $a$  et  $b$  deux réels. On obtient  $z^2 - \bar{z} = a^2 - b^2 - a + i(2ab + b)$ .

Ainsi  $\text{Im}(z^2 - \bar{z}) = 2ab + b = b(2a + 1)$ .

On a alors :  $z^2 - \bar{z}$  réel équivaut à  $b(2a + 1) = 0$ , ce qui équivaut à  $b = 0$  ou  $a = -0,5$ .

$S = \{a + 0i \text{ avec } a \in \mathbb{R}\} \cup \{-0,5 + bi \text{ avec } b \in \mathbb{R}\}$

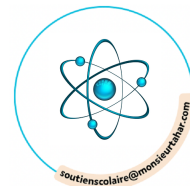
**Méthode 2 :**  $z^2 - \bar{z}$  est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué.

Le conjugué de  $z^2 - \bar{z}$  s'écrit :  $\overline{z^2 - \bar{z}} = \overline{z^2} - \overline{\bar{z}} = (\bar{z})^2 - z$

Ainsi,  $z^2 - \bar{z}$  est réel  $\Leftrightarrow z^2 - \bar{z} = (\bar{z})^2 - z \Leftrightarrow (\bar{z})^2 - z^2 + \bar{z} - z = 0 \Leftrightarrow (\bar{z} - z)(\bar{z} + z) + \bar{z} - z = 0$

$\Leftrightarrow (\bar{z} - z)(\bar{z} + z + 1) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} + z = 0$  ou  $\bar{z} + z = -1 \Leftrightarrow z$  réel ou  $\text{Re}(z) = -0,5$

$S = \{a + 0i \text{ avec } a \in \mathbb{R}\} \cup \{-0,5 + bi \text{ avec } b \in \mathbb{R}\}$

**Exercice résolu 2** Résoudre des équations du 1<sup>er</sup> degré

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante avec la technique 1 du cours.

$$3z + 1 - 2i = 4 - 3i - 2iz$$

**✓ Solution commentée**

$$3z + 1 - 2i = 4 - 3i - 2iz \Leftrightarrow (2 + 2i)z = 3 - i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3-i}{2+2i} \text{ (on multiplie numérateur et dénominateur par } 2-2i)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(3-i) \times (2-2i)}{(2+2i) \times (2-2i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4-8i}{8}, \text{ donc } S = \{0,5 - i\}.$$

**Exercice résolu 3** Résoudre des équations faisant intervenir une inconnue et son conjugué

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes avec la technique 2 du cours.

**1**  $z + 2\bar{z} = 3 - 4i$

**2**  $z^2 = z \times \bar{z}$

**✓ Solution commentée**

**1** On écrit  $z$  sous la forme  $a + ib$ .

$$z + 2\bar{z} = 3 - 4i \Leftrightarrow a + ib + 2(a - ib) = 3 - 4i \Leftrightarrow 3a - ib = 3 - 4i$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a alors  $3a = 3$  et  $-b = -4$ , d'où  $a = 1$  et  $b = 4$ .

Ainsi  $S = \{1 + 4i\}$ .

**2** On écrit  $z$  sous la forme  $a + ib$ .

$$z^2 = z \times \bar{z} \Leftrightarrow (a + ib)^2 = (a + ib) \times (a - ib) \Leftrightarrow a^2 + 2abi - b^2 = a^2 - (ib)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = a^2 + b^2$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a alors  $a^2 - b^2 = a^2 + b^2$  et  $2ab = 0$ , c'est-à-dire  $b^2 = 0$  et  $ab = 0$ , donc  $S = \{a + 0i \text{ avec } a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ .