MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 1

Connaître le cours

1. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1. Forme algébrique d'un nombre complexe

Théorème (admis)

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, contenant $\mathbb{R}$ et vérifiant :
- l'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes ;
- il existe un nombre dans $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$;
- tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = x + iy$ (où x et y sont réels) ;
- le nombre 0 s'écrit $0 + i0$.

Définition

L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.
- x est la partie réelle de z, notée $Re(z)$.
- y est la partie imaginaire de z, notée $Im(z)$.

Exemple

On pose $z = 5 + 3i$ et $z' = 2 - 7i$, on cherche $Re(z + z')$ et $Im(z \times z')$.
- $z + z' = (5 + 3i) - (2 - 7i) = 5 + 3i - 2 + 7i = 5 - 2 + 3i + 7i = 3 + 10i$.
- $z \times z' = (5 + 3i) \times (2 - 7i) = 10 - 35i + 6i - 21i^2 = 10 - 29i - 21 \times (-1) = 31 - 29i$.

Et par conséquent : $Re(z + z') = 3$ et $Im(z \times z') = -29$.

2. La division dans $\mathbb{C}$

Propriété

DÉMO p. 19

Tout nombre complexe non nul z admet un unique inverse, noté $\frac{1}{z}$.

Technique Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient dans $\mathbb{C}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur du quotient par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple

L'inverse de $3 + 2i$ est $\frac{1}{3+2i} = \frac{1 \times (3-2i)}{(3+2i) \times (3-2i)} = \frac{3-2i}{9-(2i)^2} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$.

3. Conjugué

Définition

On appelle **conjugué** d'un nombre complexe z le nombre complexe noté $\overline{z}$ ayant même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée, c'est-à-dire si $z = x + iy$, alors $\overline{z} = x - iy$.

Propriétés

DÉMO p. 15

Soient z et z' deux nombres complexes.

a. $\overline{\overline{z}} = z$ **b.** $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ **c.** $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ **d.** $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **e.** si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Exemple

Le conjugué de $(5 + 3i) \times (2 - 7i)$ est
$\overline{(5+3i) \times (2-7i)} = \left(\overline{5+3i}\right) \times \left(\overline{2-7i}\right) = (5-3i) \times (2+7i) = 10 + 35i - 6i + 21 = 31 + 29i$.

Exercice résolu 1 Calculer dans $\mathbb{C}$

On pose $z=2+\text{i}$ et $z'=3-2\text{i}$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $4z-3\text{i}z'$ 2. $z\times z'$ 3. $(z')^2$

Solution commentée

Les techniques opératoires valables pour les réels se prolongent à l'ensemble des nombres complexes : distributivité et identités remarquables s'appliquent et $\text{i}^2=-1$

1. $4z-3\text{i}z'=4(2+\text{i})-3\text{i}(3-2\text{i})=8+4\text{i}-9\text{i}+6\text{i}^2=2-5\text{i}$.
2. $z\times z'=(2+\text{i})(3-2\text{i})=6-4\text{i}+3\text{i}-2\text{i}^2=8-\text{i}$.
3. $(z')^2=(3-2\text{i})^2=9-2\times3\times2\text{i}+(2\text{i})^2=9-12\text{i}-4=5-12\text{i}$.

Exercice résolu 2 Utiliser le conjugué

Écrire sous forme algébrique, le conjugué des nombres complexes suivants.

1. $-2+3\text{i}$ 2. $\text{i}(2-5\text{i})$ 3. $\dfrac{1-\text{i}}{2\text{i}}$

Solution commentée

1. $\overline{-2+3\text{i}}=-2-3\text{i}$.
2. $\overline{\text{i}(2-5\text{i})}=\bar{\text{i}}\times\left(\overline{2-5\text{i}}\right)=-\text{i}\times(2+5\text{i})=-2\text{i}-5\text{i}^2=5-2\text{i}$. Il est possible aussi de déterminer la forme algébrique du nombre complexe, puis d'en prendre ensuite le conjugué : $\text{i}(2-5\text{i})=2\text{i}-5\text{i}^2=5+2\text{i}$ et donc $\overline{\text{i}(2-5\text{i})}=5-2\text{i}$.
3. $\overline{\left(\dfrac{1-\text{i}}{2\text{i}}\right)}=\dfrac{\overline{1-\text{i}}}{\overline{2\text{i}}}=\dfrac{1+\text{i}}{-2\text{i}}=\dfrac{(1+\text{i})\times\text{i}}{-2\text{i}\times\text{i}}=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$.
Il est possible aussi de déterminer la forme algébrique du nombre complexe, puis d'en prendre ensuite le conjugué : $\dfrac{1-\text{i}}{2\text{i}}=\dfrac{(1-\text{i})\times\text{i}}{-2\text{i}\times\text{i}}=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}$ et donc $\overline{\left(\dfrac{1-\text{i}}{2\text{i}}\right)}=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$.

Exercice résolu 3 Quotient dans $\mathbb{C}$

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

1. $z=\dfrac{2+\text{i}}{3-2\text{i}}$ 2. $z'=\dfrac{1-\text{i}}{1+\text{i}}$

Solution commentée

On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur pour faire apparaître l'identité remarquable $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

1. Pour $z=\dfrac{2+\text{i}}{3-2\text{i}}$, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de $3-2\text{i}$, c'est-à-dire par $3+2\text{i}$.
$z=\dfrac{2+\text{i}}{3-2\text{i}}=\dfrac{(2+\text{i})\times(3+2\text{i})}{(3-2\text{i})\times(3+2\text{i})}=\dfrac{6+4\text{i}+3\text{i}-2}{3^2-(2\text{i})^2}=\dfrac{4}{13}+\text{i}\dfrac{7}{13}$.
2. Pour $z'=\dfrac{1-\text{i}}{1+\text{i}}$, on multiplie à nouveau numérateur et dénominateur par le conjugué de $1+\text{i}$, c'est-à-dire par $1-\text{i}$.
$z'=\dfrac{1-\text{i}}{1+\text{i}}=\dfrac{(1-\text{i})(1-\text{i})}{(1+\text{i})(1-\text{i})}=\dfrac{(1-\text{i})^2}{1^2+1^2}=\dfrac{-2\text{i}}{2}=-\text{i}$.

2. Techniques opératoires

1. Nombres réels, nombres imaginaires purs

Définition

- $Im(z)=0 \Leftrightarrow z=\overline{z}$, on dit alors que z est réel.
- $Re(z)=0 \Leftrightarrow z=-\overline{z}$, on dit alors que z est imaginaire pur.

2. La formule du binôme de Newton

Propriété

DÉMO p. 14

Quels que soient les nombres complexes a et b, on a : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.
Cette formule porte le nom de **binôme de Newton.**

Remarque

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux. Ils se calculent avec le triangle de Pascal.

Exemple

$(1+i)^3=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}1^k i^{3-k}=\binom{3}{0}1^0 i^{3-0}+\binom{3}{1}1^1 i^{3-1}+\binom{3}{2}1^2 i^{3-2}+\binom{3}{3}1^3 i^{3-3}$

$=i^3+3i^2+3i+1=-i-3+3i+1=-2+2i$.

3. Équations dans $\mathbb{C}$

Propriété

DÉMO en ligne

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Technique 1

La résolution d'équation du premier degré dans $\mathbb{C}$ repose sur la même pratique qu'avec les nombres réels. On cherche à isoler l'inconnue.

Exemple

$3z+5i=4iz+2 \Leftrightarrow (3-4i)z=2-5i \Leftrightarrow z=\dfrac{2-5i}{3-4i}$.

On donne la réponse sous forme algébrique : $z=\dfrac{2-5i}{3-4i}=\dfrac{(2-5i)\times(3+4i)}{(3-4i)\times(3+4i)}=\dfrac{26-7i}{25}$. $S=\left\{\dfrac{26}{25}-\dfrac{7}{25}i\right\}$.

Technique 2

Soit $z=a+ib$ avec a et b deux réels. Il est possible de chercher la partie réelle a et la partie imaginaire b de z.
L'équation précédente $3z+5i=4iz+2$ s'écrit alors $3\times(a+ib)+5i=4i\times(a+ib)+2$.
On obtient après calculs $3a+i(3b+5)=-4b+2+4ai$.
Et en identifiant partie réelle et partie imaginaire des membres de gauche et de droite, on obtient pour les parties réelles : $3a=-4b+2$ et pour les parties imaginaires : $3b+5=4a$.

On aboutit à un système $\begin{cases}3a+4b=2\\4a-3b=5\end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases}a=\dfrac{26}{25}\\b=-\dfrac{7}{25}\end{cases}$ et donc $S=\left\{\dfrac{26}{25}-\dfrac{7}{25}i\right\}$.

Remarque

L'usage de la technique 2 est incontournable lorsque l'équation comporte l'inconnue et son conjugué comme par exemple $z+2\overline{z}=3-4i$.

Exercice résolu 1 Caractériser les nombres réels et les nombres imaginaires purs

Déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^2-\overline{z}$ soit un nombre réel.

Solution commentée

Méthode 1 : $z^2-\overline{z}$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
On pose $z=a+\mathrm{i}b$, avec a et b deux réels. On obtient $z^2-\overline{z}=a^2-b^2-a+\mathrm{i}(2ab+b)$.
Ainsi $Im\left(z^2-\overline{z}\right)=2ab+b=b(2a+1)$.
On a alors : $z^2-\overline{z}$ réel équivaut à $b(2a+1)=0$, ce qui équivaut à $b=0$ ou $a=-0{,}5$.
$S=\{a+0\mathrm{i} \text{ avec } a\in\mathbb{R}\}\cup\{-0{,}5+b\mathrm{i} \text{ avec } b\in\mathbb{R}\}$

Méthode 2 : $z^2-\overline{z}$ est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué.
Le conjugué de $z^2-\overline{z}$ s'écrit : $\overline{z^2-\overline{z}}=\overline{z^2}-\overline{\overline{z}}=(\overline{z})^2-z$
Ainsi, $z^2-\overline{z}$ est réel $\Leftrightarrow z^2-\overline{z}=(\overline{z})^2-z \Leftrightarrow (\overline{z})^2-z^2+\overline{z}-z=0 \Leftrightarrow (\overline{z}-z)(\overline{z}+z)+\overline{z}-z=0$
$\Leftrightarrow (\overline{z}-z)(\overline{z}+z+1)=0 \Leftrightarrow \overline{z}+z=0$ ou $\overline{z}+z=-1 \Leftrightarrow z$ réel ou $Re(z)=-0{,}5$
$S=\{a+0\mathrm{i} \text{ avec } a\in\mathbb{R}\}\cup\{-0{,}5+b\mathrm{i} \text{ avec } b\in\mathbb{R}\}$

Exercice résolu 2 Résoudre des équations du 1^er^ degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante avec la technique 1 du cours.
$3z+1-2\mathrm{i}=4-3\mathrm{i}-2\mathrm{i}z$

Solution commentée

$$3z+1-2\mathrm{i}=4-3\mathrm{i}-2\mathrm{i}z \Leftrightarrow (2+2\mathrm{i})z=3-\mathrm{i}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{3-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} \text{ (on multiplie numérateur et dénominateur par } 2-2\mathrm{i})$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{(3-\mathrm{i})\times(2-2\mathrm{i})}{(2+2\mathrm{i})\times(2-2\mathrm{i})}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{4-8\mathrm{i}}{8}, \text{ donc } S=\{0{,}5-\mathrm{i}\}.$$

Exercice résolu 3 Résoudre des équations faisant intervenir une inconnue et son conjugué

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes avec la technique 2 du cours.

1 $z+2\overline{z}=3-4\mathrm{i}$ 2 $z^2=z\times\overline{z}$

Solution commentée

1 On écrit z sous la forme $a+\mathrm{i}b$.
$z+2\overline{z}=3-4\mathrm{i} \Leftrightarrow a+\mathrm{i}b+2(a-\mathrm{i}b)=3-4\mathrm{i} \Leftrightarrow 3a-\mathrm{i}b=3-4\mathrm{i}$
En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a alors $3a=3$ et $-b=-4$,
d'où $a=1$ et $b=4$.
Ainsi $S=\{1+4\mathrm{i}\}$.

2 On écrit z sous la forme $a+\mathrm{i}b$.
$z^2=z\times\overline{z} \Leftrightarrow (a+\mathrm{i}b)^2=(a+\mathrm{i}b)\times(a-\mathrm{i}b) \Leftrightarrow a^2+2ab\mathrm{i}-b^2=a^2-(\mathrm{i}b)^2$
$\Leftrightarrow a^2-b^2+2ab\mathrm{i}=a^2+b^2$
En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a alors $a^2-b^2=a^2+b^2$ et $2ab=0$,
c'est-à-dire $b^2=0$ et $ab=0$, donc $S=\{a+0\mathrm{i} \text{ avec } a\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$.