MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 1

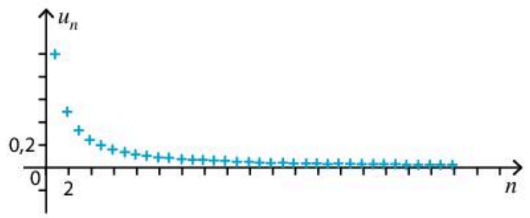
Suites et limites

Connaître le cours

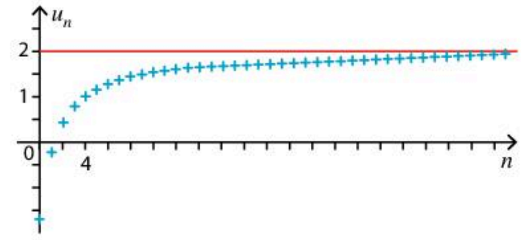
1. Notion intuitive de la limite d'une suite

S'intéresser à la limite d'une suite (u_n), c'est étudier le comportement des termes u_n quand on donne à n des valeurs entières aussi grandes que l'on veut, ce qui se dit aussi « quand n tend vers $+\infty$ ».

1. Limite finie



Les termes de la suite semblent se rapprocher autant que l'on veut vers une valeur limite.
Sur le graphique ci-dessus, la limite semble être 0.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
On dit que u_n tend vers 0 ou que la suite (u_n) converge vers 0.

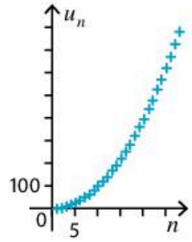


Les termes de la suite semblent se rapprocher autant que l'on veut vers une valeur limite.
Sur le graphique ci-dessus, la limite semble être 2.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.
On dit que u_n tend vers 2 ou que la suite (u_n) converge vers 2.

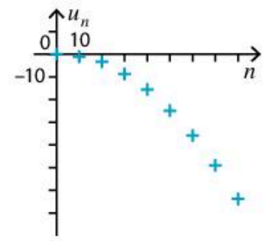
Propriété (admise)

Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, … , $\frac{1}{n^k}$ (k entier naturel) et $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Limite infinie



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



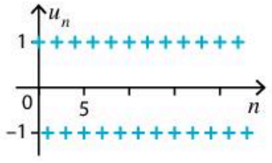
Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut en valeur absolue et sont négatifs.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété (admise)

Les suites de terme général n, n^2, … , n^k (k entier naturel) et $\sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

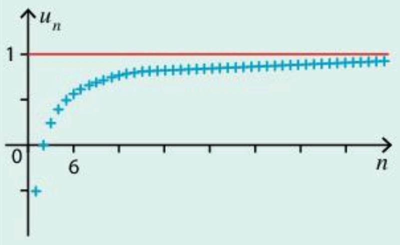
Remarque

Il existe des suites qui n'ont pas de limite.
Par exemple (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = (-1)^n$.

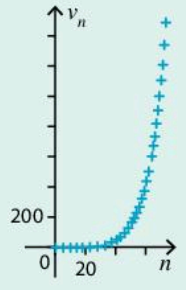


Méthode 1 Conjecturer une limite à l'aide d'un graphique

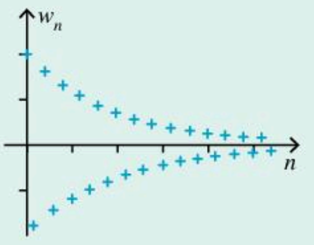
Conjecturer le comportement de chacune des suites représentées ci-dessous quand n tend vers $+\infty$.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Solution commentée

1. Les termes de la première suite (u_n) semblent se rapprocher autant que l'on veut de 1.
On conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

2. Les valeurs des termes de la deuxième suite (v_n) semblent devenir aussi grandes que l'on veut.
On conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

3. Les valeurs des termes de la troisième suite (w_n) semblent se rapprocher autant que l'on veut de 0 en alternant de signes. On conjecture $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

Méthode 2 Conjecturer une limite avec un tableur

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 5$.
En utilisant un tableur, conjecturer la limite de la suite (u_n).

Solution commentée

On écrit la relation de récurrence dans un tableur et on recopie vers le bas les formules.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	=0,8*B2+5
4	2	10,92
5	3	13,736

57	55	24,9998971
58	56	24,9999177
59	57	24,9999342
60	58	24,9999473
61	59	24,9999579

On conjecture que la suite tend vers 25 lorsque n tend vers $+\infty$.

Connaître le cours

2. Limites et opérations

1. Somme

Propriété (admise)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, soient ℓ et ℓ' deux réels.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Remarque

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors on ne peut pas conclure sur la limite de (u_n+v_n) grâce à cette propriété : on dit qu'on a une **forme indéterminée**. Il est nécessaire de transformer l'écriture de u_n+v_n pour déterminer cette limite éventuelle.
- La limite de $(u_n+\alpha)$, où α est un réel, est la limite de (u_n+v_n) dans le cas où (v_n) est la suite constante de terme général $v_n=\alpha$ pour tout n.

2. Produit

Propriété (admise)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, soient ℓ et ℓ' deux réels. Le symbole ∞ désigne soit $+\infty$ soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell\neq 0$	∞	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$	$\ell\ell'$	∞	∞	Forme indéterminée

Remarque

- Quand le tableau indique $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \infty$, il faut utiliser la règle des signes pour conclure.

Par exemple, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

- La limite de (ku_n), où k est un réel non nul, est la limite de (u_nv_n) dans le cas où (v_n) est la suite constante de terme général $v_n=k$ pour tout n.

3. Quotient

Propriété (admise)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que tous les v_n sont non nuls. Soient ℓ et ℓ' deux réels.
Le symbole ∞ désigne soit $+\infty$ soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell\neq 0$	ℓ	∞	∞	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell'\neq 0$	0	∞	ℓ	∞	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Remarque

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, il faut que v_n soit de signe constant à partir d'un certain rang pour pouvoir appliquer la règle des signes et conclure sur la limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$. Sinon, le quotient n'a pas de limite.

Méthode 1 Déterminer une limite en utilisant les opérations

Déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n non nul ci-dessous.

1. $u_n = \frac{1}{n} - 2$
2. $u_n = \frac{3}{n^2+1}$

Solution commentée

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 = -2$, donc par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+1\right) = +\infty$, donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Méthode 2 Déterminer une limite en utilisant la règle des signes

Déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n non nul ci-dessous.

1. $u_n = (n+1)(2-n)$
2. $u_n = \left(\frac{1}{n} - 2\right)\left(1 - n^2\right)$

Solution commentée

1. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (2-n) = -\infty$.
   En appliquant la règle des signes, la propriété sur la limite d'un produit donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - 2\right) = -2$. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-n^2\right) = -\infty$.
   En appliquant la règle des signes, la propriété sur la limite d'un produit donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Méthode 3 Lever une indétermination

Déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n non nul ci-dessous.

1. $u_n = 2n^2 - n + 1$
2. $v_n = \frac{n+2}{n^2+1}$

Solution commentée

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n+1) = -\infty$. On a une forme indéterminée de la somme. On ne peut pas conclure immédiatement.
   On factorise par le terme de plus haut degré : $2n^2 - n + 1 = 2n^2\left(1 - \frac{n}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = 2n^2\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$.
   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$, donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = 1$.
   La propriété sur la limite d'un produit donne donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+1\right) = +\infty$. On a une forme indéterminée du quotient.
   On factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
   Pour tout entier naturel n non nul, $v_n = \dfrac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right) = 1$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$.
   La propriété sur la limite d'un quotient donne donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3. Limites et comparaisons

1. Limite infinie

Propriété (admise)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

2. Limite finie

Propriété (admise)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.
On suppose que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.
On a alors $\ell \leqslant \ell'$.

Remarques

- Si (u_n) converge vers ℓ et si, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant k$ ($k \in \mathbb{R}$), alors $\ell \leqslant k$.
- Si, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell'$ et $u_n < v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

En d'autres termes, les deux suites peuvent avoir la même limite même si les termes des deux suites sont rangés, pour tout entier n, dans un ordre strict.

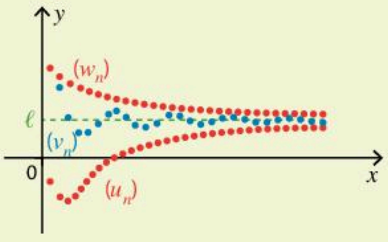
Exemple

$u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. On a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n < v_n$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Théorème d'encadrement dit théorème des gendarmes (admis)

Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n < v_n < w_n$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.



Exemple

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $v_n = \dfrac{5 \times (-1)^n}{n}$.

On a, pour tout $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Comme n est un entier strictement positif, on peut multiplier les inégalités par $\dfrac{5}{n}$.

On a alors $-\dfrac{5}{n} \leqslant \dfrac{5 \times (-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{5}{n}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{5}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{n} = 0$.

Par le théorème des gendarmes, on obtient donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Méthode 1 Déterminer une limite par comparaison

Dans chacun des cas ci-dessous, comparer les suites (u_n) et (v_n) afin de déterminer la limite éventuelle de (u_n).

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + \sqrt{n+1}$ et $v_n = n^2$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = -n - \dfrac{n^2+1}{n^2+2}$ et $v_n = -n$.
3. Pour tout entier naturel n, $u_n = n^3 + (-1)^n$ et $v_n = n^3$.

Solution commentée

1. Pour tout entier naturel n, $n+1 > 0$, donc $\sqrt{n+1}$ existe et $\sqrt{n+1} > 0$. On a donc $u_n > n^2$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Pour tout entier naturel n, $\dfrac{n^2+1}{n^2+2} > 0$, donc $-\dfrac{n^2+1}{n^2+2} < 0$, donc $-n-\dfrac{n^2+1}{n^2+2} < -n$ et donc , $u_n < -n$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $n^3 - 1 \leqslant n^3 + (-1)^n \leqslant n^3 + 1$ et donc $u_n \geqslant n^3 - 1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - 1 = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Méthode 2 Comparer des limites

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n \leqslant \dfrac{3n+5}{n}$.
On suppose que (u_n) est convergente.
Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant 3$.

Solution commentée

On a, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{3n+5}{n} = \dfrac{3n}{n} + \dfrac{5}{n} = 3 + \dfrac{5}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$, donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{5}{n}\right) = 3$.

On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leqslant 3$.

Méthode 3 Déterminer une limite par le théorème d'encadrement

Déterminer la limite de la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+4}$$

Solution commentée

Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$. Or $n+4 > 0$, donc on peut diviser chaque membre des inégalités par $n+4$:

$$-\frac{1}{n+4} \leqslant \frac{(-1)^n}{n+4} \leqslant \frac{1}{n+4}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+4}\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n+4}\right) = 0$.

On en conclut, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Suites arithmétiques et géométriques

1. Limite des suites arithmétiques

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Si $r = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

DÉMONSTRATION

On écrit la formule explicite de u_n, soit $u_n = u_0 + nr$.

Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nr = +\infty$, donc, par somme de la constante u_0, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_0 + nr) = +\infty$.

Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nr = -\infty$, donc, par somme de la constante u_0, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_0 + nr) = -\infty$.

Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante, égale à u_0, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

2. Limite des suites géométriques

Propriété (admise)

- Limite de q^n dans le cas où $q \geqslant 0$

Si $0 \leqslant q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$; Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

- Limite d'une suite géométrique dans le cas où $q \geqslant 0$

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \geqslant 0$.

Si $0 \leqslant q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

Si $q > 1$, alors $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ lorsque } u_0 \text{ est positif} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \text{ lorsque } u_0 \text{ est négatif} \end{cases}$.

Propriété

- Limite de la somme des termes d'une suite géométrique dans le cas $0 < q < 1$

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q telle que $0 < q < 1$.

La somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) est $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$.

On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1-q}$.

DÉMONSTRATION

Comme $0 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$, donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - q^{n+1}) = 1$.

Par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_0(1-q^{n+1}) = u_0$ et, par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q} = \dfrac{u_0}{1-q}$.

Méthode 1 Déterminer la limite d'une suite arithmétique

1. Déterminer la limite de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison −0,1.
2. Déterminer la limite de la suite arithmétique (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = -2 + n$.
3. Déterminer la limite de la suite arithmétique (u_n) sachant que $u_0 = -4$ et $u_6 = 32$.

Solution commentée

1. La raison r est négative, donc la suite tend vers $-\infty$.

2. La raison r est égale à 1. La raison est positive, donc la suite tend vers $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$, où r est la raison, donc $u_6 = u_0 + 6r$.
On en déduit :
$$32 = -4 + 6r \Leftrightarrow 6r = 36 \Leftrightarrow r = \frac{36}{6} = 6.$$
La raison r est positive, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Méthode 2 Étudier la limite d'une suite géométrique

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la limite de la suite géométrique (u_n) définie ci-dessous.

1. $u_n = -3 \times 2^n$
2. $v_n = \dfrac{2}{5^n}$

Solution commentée

1. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = -3$.
$2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. Or $-3 < 0$, donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. On a $v_n = 2\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$, donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{5}$.
$0 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Méthode 3 Étudier la limite de la somme des termes d'une suite géométrique

Déterminer la limite de la somme S_n des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique (u_n) définie par $u_0 = -1$ et de raison $\frac{2}{5}$.

Solution commentée

$$S_n = \frac{-1\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{2}{5}} = \frac{-1\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$, donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) = 1$.

Comme $-\frac{5}{3} < 0$, en appliquant la règle des signes, la propriété sur la limite d'un produit donne $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\frac{5}{3}$.

5. Suites arithmético-géométriques

1. Définition

Définition

Une suite arithmético-géométrique (u_n) est une suite définie, pour tout entier n, par une formule de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont deux nombres réels.

Remarques

- Si $a = 0$, la suite est constante égale à b.
- Si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison b.
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$, la suite est géométrique de raison a.

2. Représentation graphique

Exemple

On considère la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 2$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0{,}8x + 2$, où la fonction f est affine.

On représente les termes de cette suite arithmético-géométrique dans un repère.

- La courbe représentative de f est une droite d'équation $y = 0{,}8x + 2$ (en bleu sur le dessin ci-contre).

On trace la droite d'équation $y = x$.

- On place u_0 sur l'axe des abscisses.

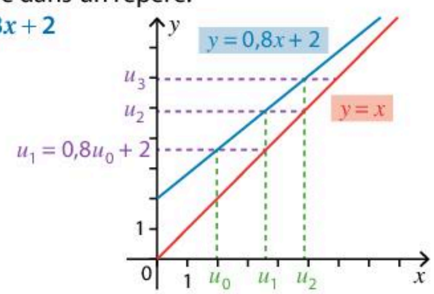
On construit $u_1 = f(u_0)$.

On reporte u_1 sur l'axe des abscisses avec la droite d'équation $y = x$.

On construit $u_2 = f(u_1)$.

On reporte u_2 sur l'axe des abscisses avec la droite d'équation $y = x$.

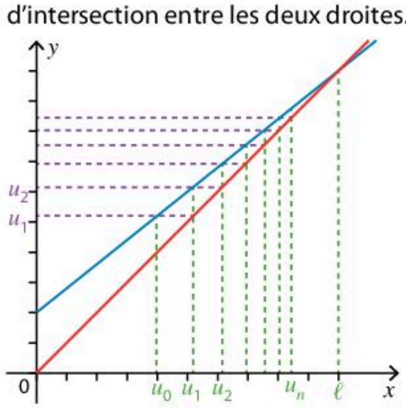
On peut construire ainsi les uns après les autres, tous les termes de la suite (u_n).



3. Limite des suites arithmético-géométriques

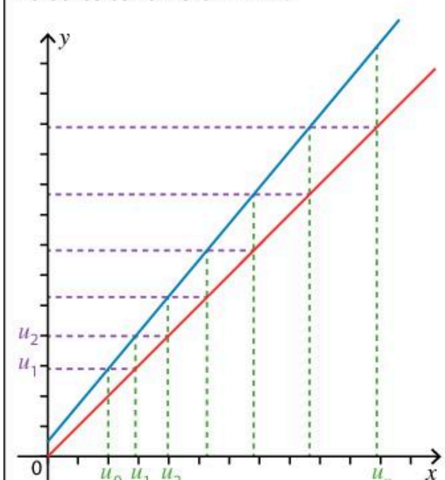
Une suite arithmético-géométrique peut converger vers un nombre réel ℓ ou tendre vers l'infini.

La suite tend vers l'abscisse du point d'intersection entre les deux droites.



$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

La suite tend vers l'infini.



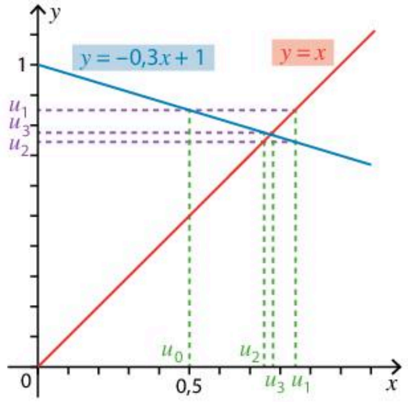
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Méthode 1 Représenter les premiers termes d'une suite arithmético-géométrique

Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -0{,}3u_n + 1$.

Solution commentée

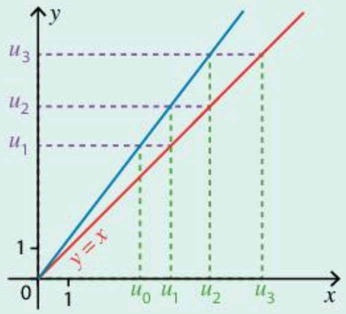
On trace les droites d'équation $y = x$ et $y = -0{,}3x + 1$.
On place $u_0 = 0{,}5$ sur l'axe des abscisses.
On construit l'image u_1 de u_0.
On reporte u_1 sur l'axe des abscisses avec la droite d'équation $y = x$.
On construit l'image u_2 de u_1.
On reporte u_2 sur l'axe des abscisses avec la droite d'équation $y = x$.
On construit l'image u_3 de u_2.
On reporte u_3 sur l'axe des abscisses avec la droite d'équation $y = x$.



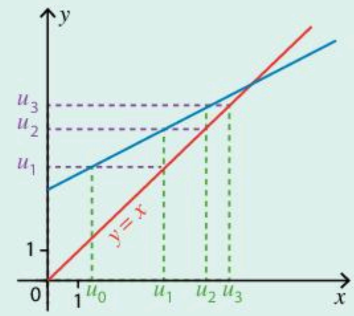
Méthode 2 Conjecturer graphiquement la convergence d'une suite arithmético-géométrique

Dans les deux exemples ci-dessous, conjecturer la convergence de la suite arithmético-géométrique dont les premiers termes sont représentés graphiquement.

1



2



Solution commentée

1. La suite semble tendre vers $+\infty$.
2. La suite semble converger vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites.