MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 1

Suites Numériques et Récurrence

1. Raisonnement par récurrence

1. Propriété mathématique

Définition

Une **propriété mathématique** est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui contient un verbe et qui est soit vraie soit fausse.

Remarque

Lorsque la propriété concerne un entier naturel n, on peut la noter $P(n)$.
Cette propriété peut être :

- une égalité, par exemple $P(n): 1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;
- une inégalité, par exemple $P(n): (1+\pi)^n \geqslant 1+n\pi$;
- une phrase, par exemple $P(n): n^3-n$ est un multiple de 3.

2. Principe de récurrence

Principe de récurrence (axiome)

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.
Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- étape 1 **(initialisation)** : $P(n)$ est vraie pour un entier n_0 ;
- étape 2 (**hérédité**) : pour tout entier $k \geqslant n_0$, « $P(k)$ est vraie » implique « $P(k+1)$ est vraie » ;

alors on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Le schéma suivant illustre le principe de récurrence.

Initialisation	**Hérédité**
$P(n_0)$ vraie	Pour tout entier $k \geqslant n_0$, « **$P(k)$ est vraie** » **implique** « **$P(k+1)$ est vraie** ».

Conclusion : **$P(n_0)$ vraie** $\Rightarrow$ **$P(n_0+1)$ vraie** $\Rightarrow$ **$P(n_0+2)$ vraie** $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ **$P(n)$ vraie**

3. Raisonnement par récurrence

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on procède ainsi.

- **Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang n_0).
- **Hérédité** : on démontre, pour tout entier k supérieur ou égal à n_0, l'implication :

$$P(k) \text{ vraie} \Rightarrow P(k+1) \text{ vraie.}$$

Pour cela, on considère un entier quelconque k, avec $k \geqslant n_0$, et on suppose que $P(k)$ est vraie (c'est-à-dire que l'on suppose que la propriété est vraie au rang k). C'est **l'hypothèse de récurrence**.
On démontre alors que $P(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $k+1$) en utilisant l'hypothèse de récurrence.

- **Conclusion** : on conclut, d'après le principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Remarque

L'initialisation se fait souvent pour $n_0=0$ ou $n_0=1$. On vérifie donc que $P(0)$ ou $P(1)$ est vraie.

Méthode 1 Vérifier qu'une propriété est vraie à un rang donné

Soit n un entier naturel. Vérifier que chaque propriété $P(n)$ suivante est vraie pour le rang n_0 donné.

1. $P(n) : 5^n - 2^n$ est un multiple de 3 ; $n_0 = 1$.
2. $P(n) : 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \leqslant n^3$; $n_0 = 2$.
3. $P(n) : 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$; $n_0 = 3$.

Solution commentée

1. On remplace n par n_0 et on obtient $5^1 - 2^1 = 3$, qui est bien un multiple de 3.
Donc $P(n)$ est vraie pour $n_0 = 1$. Ainsi, $P(1)$ est vraie.

2. On remplace n par n_0 et on obtient $1^2 + 2^2 = 5$.
Par ailleurs, $2^3 = 8$ et $5 \leqslant 8$. Donc $P(2)$ est vraie.

3. On remplace n par n_0 et on obtient $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$.
Par ailleurs, $(1 + 2 + 3)^2 = 6^2 = 36$. Donc $P(3)$ est vraie.

Méthode 2 Étudier l'initialisation d'une propriété

Soit n un entier naturel. On considère la propriété $P(n) : 3^n \geqslant (n+2)^2$.

- Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour lequel $P(n)$ est vraie.

Solution commentée

On teste $P(n)$ pour les premières valeurs entières de n :
$3^0 = 1$ et $(0+2)^2 = 2^2 = 4$, donc $P(0)$ n'est pas vraie ;
$3^1 = 3$ et $(1+2)^2 = 3^2 = 9$, donc $P(1)$ n'est pas vraie ;
$3^2 = 9$ et $(2+2)^2 = 4^2 = 16$, donc $P(2)$ n'est pas vraie ;
$3^3 = 27$ et $(3+2)^2 = 5^2 = 25$, donc $P(3)$ est vraie.
Le plus petit entier naturel n_0 pour lequel $P(n)$ est vraie est $n_0 = 3$.

Méthode 3 Mettre en œuvre un raisonnement par récurrence

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}3u_n + 7$.

- Démontrer par récurrence que $u_n \leqslant 10$ pour tout entier naturel n.

Solution commentée

On considère la propriété $P(n) : u_n \leqslant 10$.

- **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $u_0 = 2$. Or $2 \leqslant 10$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire : $u_k \leqslant 10$. On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leqslant 10$.
Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \leqslant 10$, donc $0{,}3u_k \leqslant 3$ en multipliant chaque membre par le réel positif 0,3.
En ajoutant 7 à chaque membre, on trouve alors : $0{,}3u_k + 7 \leqslant 10$, soit $u_{k+1} \leqslant 10$.
Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_n \leqslant 10$ pour tout entier naturel n.

2. Comportement global d'une suite

1. Suites monotones

Définitions

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :
- **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Une suite (u_n) est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Trois méthodes permettent l'étude de la monotonie d'une suite.
- **Méthode algébrique :** elle consiste à comparer directement u_n et u_{n+1} :
  – soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
  – soit en comparant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
- **Méthode fonctionnelle :** elle s'applique aux suites définies par une formule explicite de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction) et consiste à étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$. Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.
- **Méthode du raisonnement par récurrence :** elle s'applique aux suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et consiste à démontrer qu'une des propriétés $P(n) : u_{n+1} \leqslant u_n$ ou $P(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. Suites majorées, minorées et bornées

Définitions

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :
- **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.

M est appelé un **majorant** de (u_n).
- **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.

m est appelé un **minorant** de (u_n).
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques

- Une suite majorée admet une infinité de majorants. En effet, si M est un majorant de (u_n), tous les réels supérieurs à M sont également des majorants de (u_n). De même, une suite minorée admet une infinité de minorants.
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.
- Pour démontrer qu'une suite est majorée ou minorée, on peut utiliser une des méthodes vues plus haut.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n^2+1}$.

On peut montrer qu'elle est bornée en utilisant la méthode algébrique.

Pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{n^2+1} \geqslant 0$, donc $u_n \leqslant 2$. Donc la suite (u_n) est majorée par 2.

Pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{n^2+1} \leqslant 1$, donc $-\dfrac{1}{n^2+1} \geqslant -1$, donc $u_n \geqslant 1$. Donc la suite (u_n) est minorée par 1.

On en déduit que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$. Donc la suite (u_n) est bornée.

Méthode 1 Déterminer le sens de variation d'une suite

1. Montrer que la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 3n$, est croissante.
2. Montrer que la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n n^2$, est décroissante.
3. La suite (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 2w_n - 3$.
Montrer par récurrence que la suite (w_n) est décroissante.

Solution commentée

1. On peut utiliser la méthode algébrique : on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - (n^2 + 3n) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - n^2 - 3n = 2n + 4$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 4 \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, donc la suite (u_n) est croissante.
On peut également utiliser la méthode fonctionnelle en étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x$ sur $[0 ; +\infty[$. $f'(x) = 2x + 3$. Or $2x + 3 \geqslant 0$ sur $[0 ; +\infty[$, donc la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc la suite (u_n) est croissante.

2. On peut utiliser la méthode algébrique : ici, on a, pour tout entier $n \geqslant 1, v_n > 0$.
Donc on compare le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1 pour tout entier $n \geqslant 1$.
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}(n+1)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^n n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2.$$ Or $\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \leqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$, donc la suite (v_n) est décroissante.

3. On considère la propriété $P(n) : w_{n+1} \leqslant w_n$.
- **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $w_1 = 2w_0 - 3 = -1$ et $w_0 = 1$, donc $w_1 \leqslant w_0$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire $w_{k+1} \leqslant w_k$.
On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire $w_{k+2} \leqslant w_{k+1}$.
Par hypothèse de récurrence, on a $w_{k+1} \leqslant w_k$, donc $2w_{k+1} \leqslant 2w_k$ en multipliant chaque membre par le réel positif 2. En ajoutant à chaque membre le nombre –3, on a alors $2w_{k+1} - 3 \leqslant 2w_k - 3$, soit $w_{k+2} \leqslant w_{k+1}$.
Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $w_{n+1} \leqslant w_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 0$. Donc la suite (w_n) est décroissante.

Méthode 2 Montrer qu'une suite est majorée ou minorée

1. Montrer que la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 5$, est minorée par –4.
2. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - 3$.
Montrer par récurrence que la suite (v_n) est majorée par 3.

Solution commentée

1. Pour montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -4$, on étudie le signe de la différence $u_n - (-4)$.
$u_n - (-4) = n^2 - 6n + 9 = (n-3)^2$. Or $(n-3)^2 \geqslant 0$ pour tout entier naturel n, donc $u_n - (-4) \geqslant 0$, donc $u_n \geqslant -4$.
Donc la suite (u_n) est minorée par –4.

2. On considère la propriété $P(n) : v_n \leqslant 3$.
- **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $v_0 = 1$. Or $1 \leqslant 3$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $v_k \leqslant 3$.
Alors $2v_k \leqslant 6$, donc $2v_k - 3 \leqslant 3$, donc $v_{k+1} \leqslant 3$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $v_n \leqslant 3$. Donc la suite (v_n) est majorée par 3.