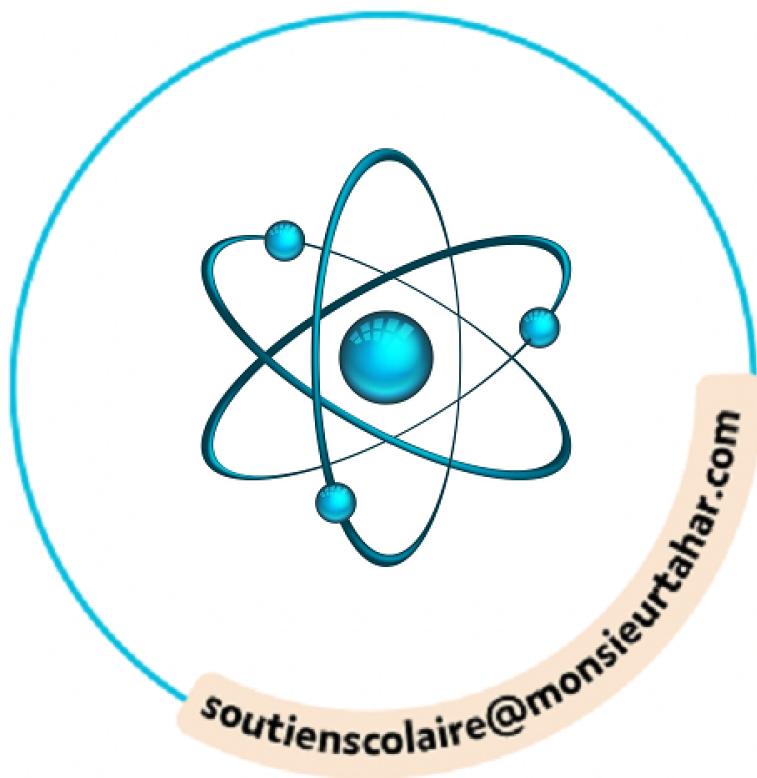
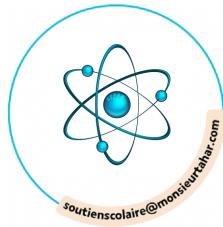


MATHEMATIQUES



CHAPITRE 1

Suites Numériques et Récurrence



1. Raisonnement par récurrence

1. Propriété mathématique

Définition

Une **propriété mathématique** est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui contient un verbe et qui est soit vraie soit fausse.

Remarque

Lorsque la propriété concerne un entier naturel n , on peut la noter $P(n)$.

Cette propriété peut être :

- une égalité, par exemple $P(n) : 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$;
- une inégalité, par exemple $P(n) : (1+\pi)^n \geq 1+n\pi$;
- une phrase, par exemple $P(n) : n^3 - n$ est un multiple de 3.

2. Principe de récurrence

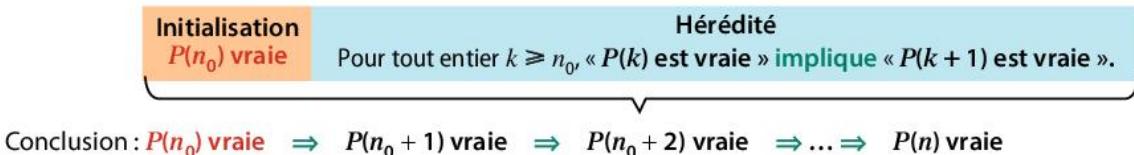
Principe de récurrence (axiome)

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- étape 1 (**initialisation**) : $P(n)$ est vraie pour un entier n_0 ;
- étape 2 (**héritérité**) : pour tout entier $k \geq n_0$, « $P(k)$ est vraie » implique « $P(k+1)$ est vraie » ; alors on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Le schéma suivant illustre le principe de récurrence.



3. Raisonnement par récurrence

$P(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède ainsi.

- **Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang n_0).
- **Héritérité** : on démontre, pour tout entier k supérieur ou égal à n_0 , l'implication :

$$P(k) \text{ vraie} \Rightarrow P(k+1) \text{ vraie.}$$

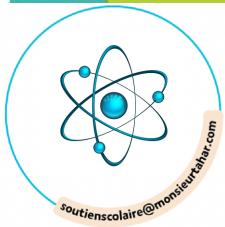
Pour cela, on considère un entier quelconque k , avec $k \geq n_0$, et on suppose que $P(k)$ est vraie (c'est-à-dire que l'on suppose que la propriété est vraie au rang k). C'est l'**hypothèse de récurrence**.

On démontre alors que $P(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $k+1$) en utilisant l'hypothèse de récurrence.

- **Conclusion** : on conclut, d'après le principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarque

L'initialisation se fait souvent pour $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$. On vérifie donc que $P(0)$ ou $P(1)$ est vraie.



Méthode 1 Vérifier qu'une propriété est vraie à un rang donné

Soit n un entier naturel. Vérifier que chaque propriété $P(n)$ suivante est vraie pour le rang n_0 donné.

- 1 $P(n) : 5^n - 2^n$ est un multiple de 3 ; $n_0 = 1$.
- 2 $P(n) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \leq n^3$; $n_0 = 2$.
- 3 $P(n) : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$; $n_0 = 3$.

Solution commentée

- 1 On remplace n par n_0 et on obtient $5^1 - 2^1 = 3$, qui est bien un multiple de 3. Donc $P(n)$ est vraie pour $n_0 = 1$. Ainsi, $P(1)$ est vraie.
- 2 On remplace n par n_0 et on obtient $1^2 + 2^2 = 5$. Par ailleurs, $2^3 = 8$ et $5 \leq 8$. Donc $P(2)$ est vraie.
- 3 On remplace n par n_0 et on obtient $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1+8+27 = 36$. Par ailleurs, $(1+2+3)^2 = 6^2 = 36$. Donc $P(3)$ est vraie.

Méthode 2 Étudier l'initialisation d'une propriété

Soit n un entier naturel. On considère la propriété $P(n) : 3^n \geq (n+2)^2$.

- Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour lequel $P(n)$ est vraie.

Solution commentée

On teste $P(n)$ pour les premières valeurs entières de n :

- $3^0 = 1$ et $(0+2)^2 = 2^2 = 4$, donc $P(0)$ n'est pas vraie ;
- $3^1 = 3$ et $(1+2)^2 = 3^2 = 9$, donc $P(1)$ n'est pas vraie ;
- $3^2 = 9$ et $(2+2)^2 = 4^2 = 16$, donc $P(2)$ n'est pas vraie ;
- $3^3 = 27$ et $(3+2)^2 = 5^2 = 25$, donc $P(3)$ est vraie.

Le plus petit entier naturel n_0 pour lequel $P(n)$ est vraie est $n_0 = 3$.

Méthode 3 Mettre en œuvre un raisonnement par récurrence

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,3u_n + 7$.

- Démontrer par récurrence que $u_n \leq 10$ pour tout entier naturel n .

Solution commentée

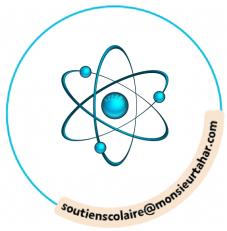
On considère la propriété $P(n) : u_n \leq 10$.

- **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $u_0 = 2$. Or $2 \leq 10$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Héritérité.** On considère un entier quelconque $k \geq 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire : $u_k \leq 10$. On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq 10$. Par hypothèse de récurrence, on a $u_k \leq 10$, donc $0,3u_k \leq 3$ en multipliant chaque membre par le réel positif 0,3.

En ajoutant 7 à chaque membre, on trouve alors : $0,3u_k + 7 \leq 10$, soit $u_{k+1} \leq 10$.

Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

- **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, c'est-à-dire $u_n \leq 10$ pour tout entier naturel n .



2. Comportement global d'une suite

1. Suites monotones

Définitions

On dit qu'une suite (u_n) définie sur \mathbb{N} est :

- **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$;
- **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.

Une suite (u_n) est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Trois méthodes permettent l'étude de la monotonie d'une suite.

- **Méthode algébrique** : elle consiste à comparer directement u_n et u_{n+1} :
 - soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
 - soit en comparant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- **Méthode fonctionnelle** : elle s'applique aux suites définies par une formule explicite de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction) et consiste à étudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$. Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.
- **Méthode du raisonnement par récurrence** : elle s'applique aux suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et consiste à démontrer qu'une des propriétés $P(n) : u_{n+1} \leq u_n$ ou $P(n) : u_{n+1} \geq u_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

2. Suites majorées, minorées et bornées

Définitions

On dit qu'une suite (u_n) définie sur \mathbb{N} est :

- **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$.
 M est appelé un **majorant** de (u_n) .
- **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq m$.
 m est appelé un **minorant** de (u_n) .
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques

- Une suite majorée admet une infinité de majorants. En effet, si M est un majorant de (u_n) , tous les réels supérieurs à M sont également des majorants de (u_n) . De même, une suite minorée admet une infinité de minorants.
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.
- Pour démontrer qu'une suite est majorée ou minorée, on peut utiliser une des méthodes vues plus haut.

Exemple

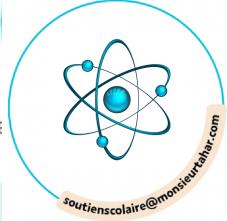
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \frac{1}{n^2 + 1}$.

On peut montrer qu'elle est bornée en utilisant la méthode algébrique.

Pour tout entier naturel n , $\frac{1}{n^2 + 1} \geq 0$, donc $u_n \leq 2$. Donc la suite (u_n) est majorée par 2.

Pour tout entier naturel n , $\frac{1}{n^2 + 1} \leq 1$, donc $- \frac{1}{n^2 + 1} \geq -1$, donc $u_n \geq 1$. Donc la suite (u_n) est minorée par 1.

On en déduit que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$. Donc la suite (u_n) est bornée.



Méthode 1 Déterminer le sens de variation d'une suite

- 1 Montrer que la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 3n$, est croissante.
- 2 Montrer que la suite (v_n) , définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n n^2$, est décroissante.
- 3 La suite (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = 2w_n - 3$.
Montrer par récurrence que la suite (w_n) est décroissante.

Solution commentée

- 1 On peut utiliser la méthode algébrique : on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - (n^2 + 3n) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - n^2 - 3n = 2n + 4.$$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 4 \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante.
On peut également utiliser la méthode fonctionnelle en étudiant les variations de la fonction $f: x \mapsto x^2 + 3x$ sur $[0; +\infty[$. $f'(x) = 2x + 3$. Or $2x + 3 \geq 0$ sur $[0; +\infty[$, donc la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc la suite (u_n) est croissante.

- 2 On peut utiliser la méthode algébrique : ici, on a, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n > 0$.

Donc on compare le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1 pour tout entier $n \geq 1$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} (n+1)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^n n^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2. \text{ Or } \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \leq 1 \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq 1$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$, donc la suite (v_n) est décroissante.

- 3 On considère la propriété $P(n)$: $w_{n+1} \leq w_n$.

- **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $w_1 = 2w_0 - 3 = -1$ et $w_0 = 1$, donc $w_1 \leq w_0$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geq 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire $w_{k+1} \leq w_k$.

On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie, c'est-à-dire $w_{k+2} \leq w_{k+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a $w_{k+1} \leq w_k$, donc $2w_{k+1} \leq 2w_k$ en multipliant chaque membre par le réel positif 2. En ajoutant à chaque membre le nombre -3 , on a alors $2w_{k+1} - 3 \leq 2w_k - 3$, soit $w_{k+2} \leq w_{k+1}$.

Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

- **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, c'est-à-dire $w_{n+1} \leq w_n$ pour tout entier naturel $n \geq 0$. Donc la suite (w_n) est décroissante.

Méthode 2 Montrer qu'une suite est majorée ou minorée

- 1 Montrer que la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 5$, est minorée par -4 .
- 2 La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n - 3$.
Montrer par récurrence que la suite (v_n) est majorée par 3.

Solution commentée

- 1 Pour montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq -4$, on étudie le signe de la différence $u_n - (-4)$.

$$u_n - (-4) = n^2 - 6n + 9 = (n-3)^2$$
. Or $(n-3)^2 \geq 0$ pour tout entier naturel n , donc $u_n - (-4) \geq 0$, donc $u_n \geq -4$.
Donc la suite (u_n) est minorée par -4 .
- 2 On considère la propriété $P(n)$: $v_n \leq 3$.
 - **Initialisation.** Pour $n_0 = 0$, $v_0 = 1$. Or $1 \leq 3$, donc $P(0)$ est vraie.
 - **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geq 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $v_k \leq 3$.
Alors $2v_k \leq 6$, donc $2v_k - 3 \leq 3$, donc $v_{k+1} \leq 3$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
 - **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n \leq 3$. Donc la suite (v_n) est majorée par 3.