MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 10

1. Graphes non-orientés

1. Vocabulaire

Définitions

Un graphe non-orienté G est un ensemble de sommets reliés par des arêtes.
Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents.
Une arête reliant deux sommets est dite incidente à ces deux sommets.
Une arête est une boucle si elle relie un sommet à lui-même.
Un sous-graphe G' d'un graphe G est un graphe constitué de certains sommets de G ainsi que des arêtes qui relient ces sommets.
L'ordre d'un graphe est le nombre total de ses sommets.
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, les boucles comptant pour deux.
Un graphe est dit simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

DÉMO p. 215

Théorème

Dans un graphe simple non-orienté, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

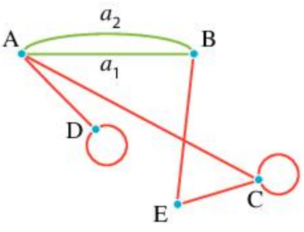
DÉMO p. 215

Conséquence

Dans un graphe simple non-orienté, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Exemple

Le graphe G est un graphe d'ordre 5.
Il n'est pas simple car il a deux boucles (une au sommet C et une au sommet D) et deux arêtes relient les sommets A et B. Dans ce cas, on nomme les arêtes pour ne pas les confondre.
Le sommet E est de degré 2 ; les sommets B et D sont de degré 3 et les sommets A et C sont de degré 4.



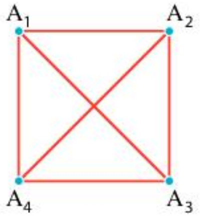
2. Graphe complet

Définition

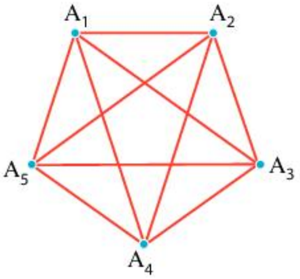
Un graphe non-orienté est complet si tous ses sommets sont adjacents.

Exemples

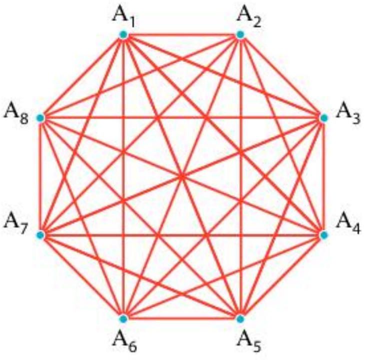
Graphe complet d'ordre 4



Graphe complet d'ordre 5

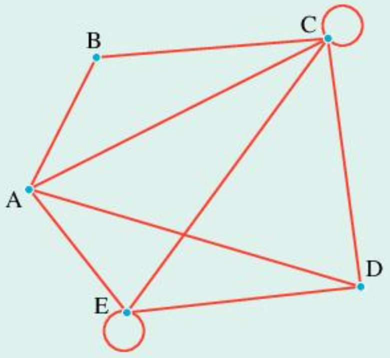


Graphe complet d'ordre 8



Exercice résolu 1 Vocabulaire

On considère le graphe G ci-contre.



1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Ce graphe est-il simple ? Justifier la réponse.
3. Compléter le tableau suivant.

Sommet					
Degré					

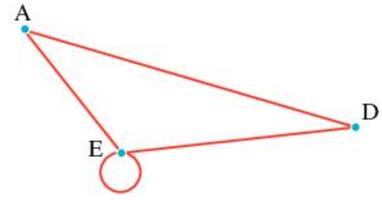
4. Combien vaut la somme des degrés des sommets de ce graphe ? Déduisez-en le nombre d'arêtes du graphe.
5. Les sommets B et D sont-ils adjacents ?
6. Dessiner le sous-graphe ADE. Quel est son ordre et combien possède-t-il d'arêtes ?

Solution commentée

1. L'ordre du graphe est 5 car le graphe possède 5 sommets.
2. Ce graphe n'est pas simple car il contient deux boucles : une au sommet C et une au sommet E.
3.

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	4	2	6	3	5

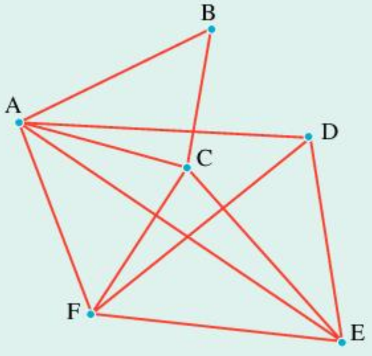
4. La somme des degrés des sommets du graphe vaut $4+2+6+3+5=20$, il y a donc 10 arêtes.



5. Les sommets B et D ne sont pas adjacents car ils ne sont pas reliés par une arête.
6. Le graphe ADE est d'ordre 3 et possède 4 arêtes.

Exercice résolu 2 Graphes complets

On considère le graphe G représenté ci-contre.



1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Le graphe est-il simple ?
3. Le graphe est-il complet ?
4. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 4. Quel est le degré de chacun de ses sommets ?
5. Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 3. Quel est le degré de chacun de ses sommets ?

Solution commentée

1. L'ordre du graphe est 6 car le graphe possède 6 sommets.
2. Le graphe est simple car il ne possède pas de boucle et il y a au plus une arête entre deux sommets distincts.
3. Le graphe n'est pas complet car les sommets C et D ne sont pas adjacents.
4. Le sous-graphe ADEF est un sous-graphe complet d'ordre 4. Tous ses sommets sont de degré 3.
5. On peut citer les sous-graphes CFE, FDE, ABC, ACF, ADE, AFE ou ADF. Tous leurs sommets sont de degré 2.

2. Parcourir un graphe non-orienté

1. Chaîne

Définitions

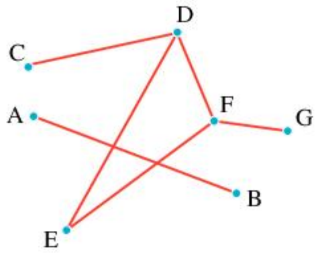
Dans un graphe non-orienté, on appelle chaîne une suite de sommets dans laquelle deux sommets consécutifs sont adjacents.
La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui composent la chaîne.
Une chaîne fermée est une chaîne dont le premier et le dernier sommet sont confondus.
Un cycle est une chaîne fermée dont les arêtes sont distinctes.
Un graphe est connexe si deux sommets distincts quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

Remarque

S'il existe une chaîne qui passe par tous les sommets du graphe alors le graphe est connexe.

Exemples

Le graphe ci-contre est un graphe d'ordre 7 qui n'est pas connexe car il n'existe pas de chaîne reliant les sommets B et C.
La chaîne C-D-F-E-D-C est une chaîne fermée de longueur 5, ce n'est pas un cycle car la chaîne passe deux fois par l'arête C-D.
La chaîne D-F-E-D est un cycle de longueur 3.



2. Chaîne eulérienne

Définitions

Une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient chaque arête du graphe une et une seule fois.
Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne fermée.

Théorème d'Euler (admis)

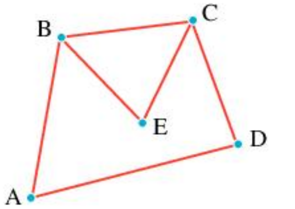
Dans le cas d'un graphe non-orienté, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.

Conséquence

Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
Si le graphe connexe a deux sommets de degré impair, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.
Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

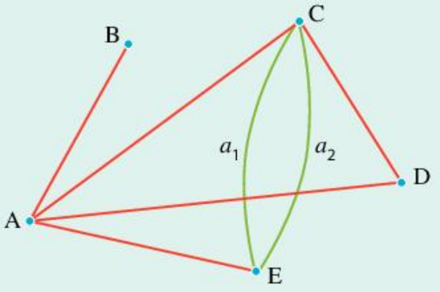
Exemple

Le graphe ci-contre est connexe et admet deux sommets de degré impairs B et C.
Il possède donc une chaîne eulérienne dont les extrémités sont B et C.
On trouve que B-C-D-A-B-E-C est une chaîne eulérienne.



Exercice résolu 1 Vocabulaire

On considère le graphe ci-contre.



1 Le graphe est-il connexe ? Le graphe est-il simple ?

2 On considère la chaîne B-A-C-a_2-E-A-B.

a. Quelle est sa longueur ?

b. Est-ce une chaîne fermée ?

c. Est-ce un cycle ?

Solution commentée

1 Le graphe est connexe car la chaîne B-A-C-D-A-E passe par tous les sommets du graphe, mais il n'est pas simple car il y a deux arêtes a_1 et a_2 entre les sommets C et E.

2 a. La longueur de la chaîne est 5 car elle contient 5 arêtes.

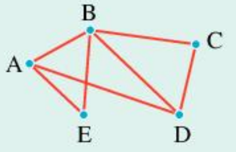
b. C'est une chaîne fermée car B est le premier et le dernier sommet de la chaîne.

c. Ce n'est pas un cycle car la chaîne contient deux fois l'arête A-B.

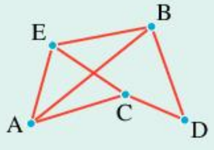
Exercice résolu 2 Chaîne eulérienne

Peut-on dessiner sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête les graphes ci-dessous ? Justifier la réponse.

Graphe 1



Graphe 2



Solution commentée

Pour savoir si on peut dessiner les graphes sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête, il faut trouver une chaîne eulérienne.

Le graphe n° 1 est connexe et possède deux sommets de degré impair (A et D), donc il possède une chaîne eulérienne et on peut le dessiner dans les conditions demandées.

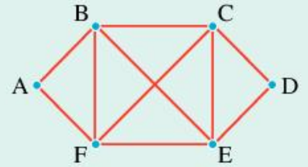
Le graphe n° 2 est connexe mais les quatre sommets A, E, B et C sont de degré impair, donc il ne possède pas de chaîne eulérienne. Il est donc impossible de le dessiner dans les conditions demandées.

Exercice résolu 3 Cycle eulérien

Le graphe ci-contre indique les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise.

Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance en partant du point A.

En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible pour l'agent de revenir à son point de départ en passant une fois et une seule par tous les chemins de cette entreprise.



Solution commentée

Ce problème revient à chercher l'existence d'un cycle eulérien.

Le graphe est connexe et n'a que des sommets de degré pair, il existe donc un cycle eulérien.

L'agent peut donc faire sa ronde en partant de A, en passant une seule fois par chaque arête et en revenant à A, par exemple : A-B-C-D-E-C-G-E-B-G-A.

3. Graphes orientés

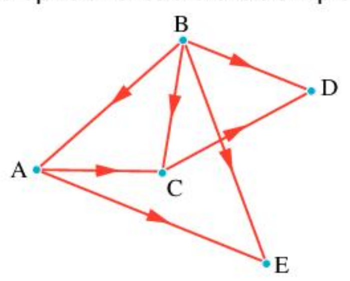
1. Définition

Définition

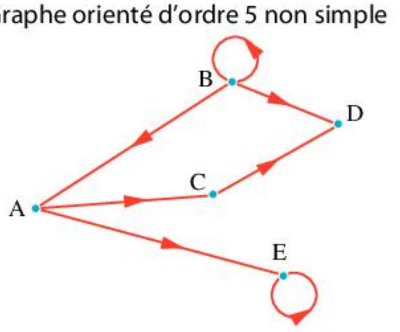
Un graphe est orienté lorsque ses arêtes sont définies par une origine et une extrémité. Une flèche indique le sens dans lequel l'arête peut être parcourue. Dans ce cas, les arêtes sont aussi appelées arcs et on parle de degré entrant d'un sommet pour le nombre d'arcs dirigés vers le sommet et de degré sortant pour le nombre d'arcs partant du sommet.

Exemples

Graphe orienté d'ordre 5 simple



Graphe orienté d'ordre 5 non simple



Remarque

Les définitions et les propriétés précédentes s'appliquent dans le cas d'un graphe orienté, excepté la notion de graphe complet et le théorème d'Euler.

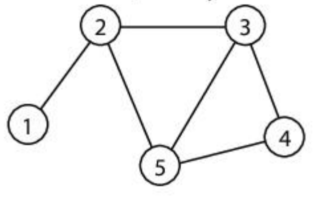
2. Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition

La matrice associée à un graphe (orienté ou non) d'ordre n est la matrice carrée de taille n, où le terme de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j. Cette matrice est appelée matrice d'adjacence du graphe.

Exemple

Graphe G_1



Matrice d'adjacence M_1 du graphe G_1

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

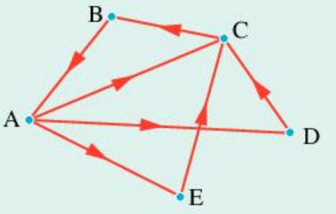
La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est symétrique car le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j est le même que celui reliant le sommet j au sommet i.

Propriété (admise)

DÉMO p. 214

On considère un graphe d'ordre n et on note M sa matrice d'adjacence.
Le nombre de chemins de longueur p reliant deux sommets i et j est donné par le terme de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice M^p noté $m_{ij}^{(p)}$.

Exercice résolu 1 Graphe orienté



On considère le graphe orienté ci-contre.

1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Quel est le degré entrant du sommet C et le degré sortant du sommet B.
3. Déterminer une chaîne de longueur 2 reliant les sommets A et C.

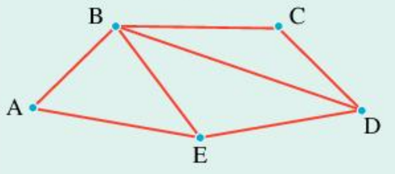
Solution commentée

1. L'ordre du graphe est 5 car il y a 5 sommets.
2. Le degré entrant du sommet C est 3 et le degré sortant du sommet B est 1.
3. A-E-C est une chaîne de longueur 2 reliant les sommets A et C.

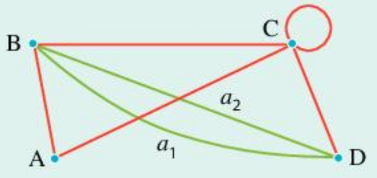
Exercice résolu 2 Matrice d'adjacence

Dans chacun des cas, déterminer la matrice d'adjacence associée au graphe donné (en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique).

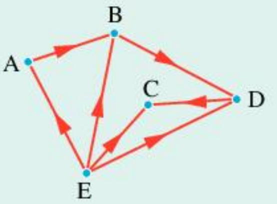
Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3



Solution commentée

On note respectivement M_1, M_2 et M_3 les matrices d'adjacence associées aux graphes 1, 2 et 3.

On a alors : $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice résolu 3 Puissance de matrice

On considère le graphe 1 de l'exercice résolu 2 et M_1 sa matrice d'adjacence.
On souhaite déterminer les chaînes de longueur 3 reliant les sommets A et E.

1. À l'aide de la matrice $M_1{}^3$, déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant les sommets A et E.
2. Lister les différentes chaînes possibles.

Solution commentée

1. Dans la matrice $M_1{}^3$, on remarque que le terme de la 1^re ligne et de la 5^e colonne est 5. On en déduit qu'il y a 5 chaînes différentes de longueur 3 reliant les sommets A et E.
2. A-B-D-E ; A-B-A-E ; A-E-D-E ; A-E-A-E et A-E-B-E.