COURS HACHETTE

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 10

VECTEURS DROITES ET PLANS DE L' ESPACE

1. Vecteurs de l'espace

1. Définition d'un vecteur de l'espace

Propriété et définition

Soient A et B deux points de l'espace. On associe le **vecteur $\overrightarrow{AB}$** à la translation qui transforme A en B. Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). On peut alors noter : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

Remarques

- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- Lorsque A et B sont confondus, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul et on le note $\vec{0}$.

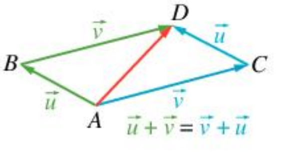
Théorème (admis)

Soient $\vec{u}$ un vecteur et A un point de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.
On dit que $\overrightarrow{AM}$ est le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

2. Opérations sur les vecteurs de l'espace

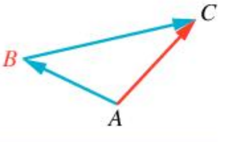
Définition (règle du parallélogramme)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. La **somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



Propriété (relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Définition

- Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :
  - la même direction que le vecteur $\vec{u}$;
  - le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$;
  - pour norme $|k| \times \|\vec{u}\|$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k, $0\vec{u} = k\vec{0} = \vec{0}$.

Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient k et k' deux réels.

- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

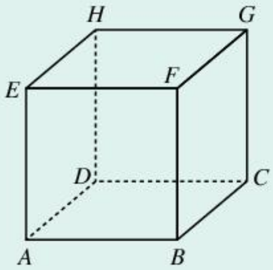
Remarques

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Méthode 1 Construire un point défini par une égalité vectorielle

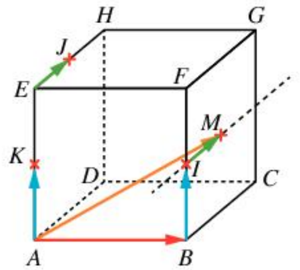
On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

Construire les points M et N tels que :



1. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$
2. $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HE}$

Solution commentée



1. On a $\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BI}$, où I est le milieu de $[BF]$, et on construit le vecteur $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EJ}$, où J est le milieu de $[EH]$.

   On a alors, avec la relation de Chasles :

   $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}$

2. $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HE}$

   Or, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GF}$, donc :

   $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HE}$, donc $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}$.

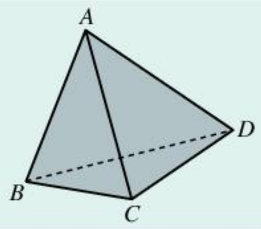
   Ainsi $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}$.

   On en déduit donc que le point N est confondu avec le point F.

EXERCICE 3 p. 326

Méthode 2 Montrer que des vecteurs sont colinéaires

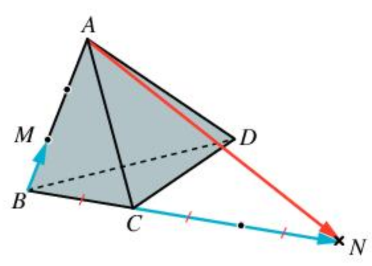
On considère le tétraèdre $ABCD$ représenté ci-contre.



1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN}=2\,\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

Solution commentée

1.



2. On utilise la relation de Chasles :

   $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=3\,\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$, car $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

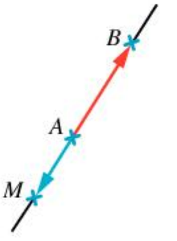
   $\overrightarrow{AN}=3\,\overrightarrow{MB}+3\,\overrightarrow{BC}$, car $\overrightarrow{CN}=2\,\overrightarrow{BC}$.

   $\overrightarrow{AN}=3\,(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})=3\,\overrightarrow{MC}$.

   On a donc $\overrightarrow{AN}=3\,\overrightarrow{MC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

2. Droites et plans de l'espace

1. Caractérisation vectorielle d'une droite



Définition

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite (AB).

Remarque

Un point A et un vecteur $\vec{u}$ suffisent à déterminer une droite : c'est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. Caractérisation vectorielle d'un plan

Définitions

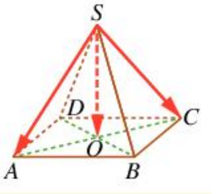
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
On dit alors que $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple

Dans la pyramide régulière à base carrée ci-contre, on a l'égalité suivante :

$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$ sont donc coplanaires.

On remarque que $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB}$ ne sont pas coplanaires.



Définitions

- On dit que des points sont **coplanaires** s'il existe un plan qui contient ces points.

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.

- Le **plan** (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC), $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une **base** de ce plan et $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de ce plan.

Remarques

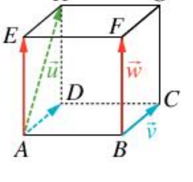
- Trois points sont toujours coplanaires.
- Un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (ou trois points non alignés) suffisent à déterminer un plan : c'est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on dit aussi que le plan est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$). Par exemple, dans la pyramide ci-dessus, le point S et les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SB}$ suffisent à déterminer le plan (SAB).

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exemple

$\vec{u} = \overrightarrow{AH}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BF}$. On a $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. Or A, D, H et E sont quatre points coplanaires, donc les vecteurs u, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



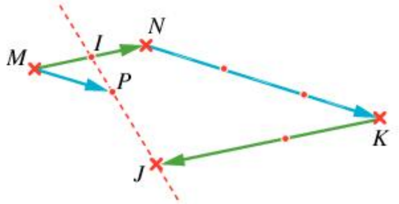
Méthode 1 Utiliser la caractérisation vectorielle d'une droite

Soient M, N et P trois points de l'espace non alignés.
On considère les points I et J tels que $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NJ}=3\,\overrightarrow{MP}-2\,\overrightarrow{MN}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le point P appartient à la droite (IJ).

Solution commentée

1



2 On cherche à montrer que $\overrightarrow{PI}$ et $\overrightarrow{PJ}$ sont colinéaires.
On a : $\overrightarrow{PI}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{PM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$.

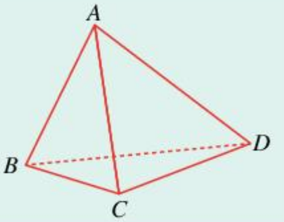
Par ailleurs :
$\overrightarrow{PJ}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NJ}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}+3\,\overrightarrow{MP}-2\,\overrightarrow{MN}$
Donc $\overrightarrow{PJ}=-2\,\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MN}$.
On en déduit :
$-2\,\overrightarrow{PI}=-2\left(\overrightarrow{PM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}\right)=-2\,\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PJ}$

Les vecteurs $\overrightarrow{PI}$ et $\overrightarrow{PJ}$ sont colinéaires, donc le point P appartient à la droite (IJ).

EXERCICE 14 p. 327

Méthode 2 Utiliser la caractérisation vectorielle d'un plan

On considère un tétraèdre $ABCD$.
Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM}=3\,\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}$.
- Montrer que le point M appartient au plan (ABC).



Solution commentée

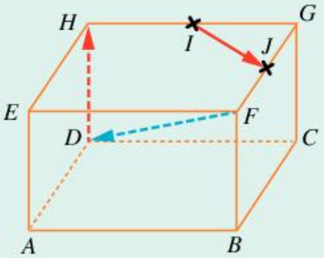
On cherche à écrire $\overrightarrow{AM}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On décompose avec la relation de Chasles :
$\overrightarrow{AM}=3\,\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=3\,\overrightarrow{BA}+3\,\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow -3\,\overrightarrow{AM}=3\,\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$
On divise chaque membre de l'égalité par -3 : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, car $-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$.

Les points A, B et C ne sont pas alignés. On a exprimé $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc le point M appartient au plan (ABC).

EXERCICE 11 p. 327

Méthode 3 Montrer que trois vecteurs sont coplanaires

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-contre. On note I et J les milieux respectifs des côtés $[GH]$ et $[FG]$.
- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.



Solution commentée

Les points I et J sont les milieux respectifs des cotés $[GH]$ et $[FG]$ donc, dans le triangle DFG, la droite (IJ) est parallèle à la droite (FH) et on a : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$. Les vecteurs $\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires, car les points H, F et D définissent un plan. Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

3. Positions relatives de droites et de p

1. Positions relatives de deux droites

Définitions

Soient d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{u'}$.

- d et d' sont **parallèles** lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.
- d et d' sont **coplanaires** lorsqu'il existe un plan qui contient d et d' et non coplanaires sinon.

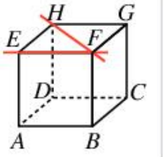
Propriétés

Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.

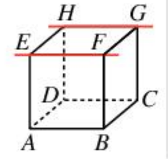
- Les droites (AB) et (CD) sont coplanaires si les points A, B, C et D sont coplanaires, c'est-à-dire s'il existe un plan contenant les quatre points A, B, C et D.
- Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.
- Si deux droites sont non coplanaires, alors leur intersection est vide.

Exemples dans le cube $ABCDEFGH$

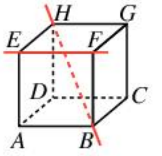
Sécantes :
$(EF) \cap (HF) = \{F\}$



Parallèles :
$(EF) \cap (HG) = \varnothing$
et $(EF) \cap (EF) = (EF)$



Non coplanaires :
$(HB) \cap (EF) = \varnothing$



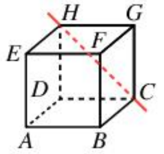
2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition et propriétés

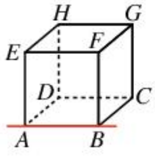
- Une droite est **parallèle à un plan** lorsqu'elle admet un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur de ce plan.
- Si une droite n'est pas parallèle à un plan, alors elle a un unique point d'intersection avec ce plan.

Exemples dans le cube $ABCDEFGH$

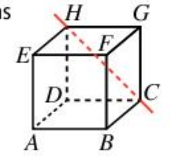
Sécants :
$(HC) \cap (ABC) = \{C\}$



Parallèles :
$(AB) // (DCG)$



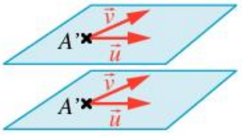
Droite incluse dans le plan :
$(HC) \subset (DCG)$

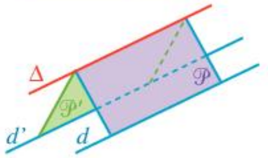


3. Positions relatives de deux plans

Définition et propriétés

- Deux plans sont **parallèles** lorsqu'ils admettent un même couple de vecteurs directeurs non colinéaires.
- Deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.
- Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.
- **Théorème du toit.** Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans. Soient d une droite incluse dans $\mathcal{P}$ et d' une droite incluse dans $\mathcal{P}'$ telles que $d // d'$. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite Δ, alors $\Delta // d // d'$.

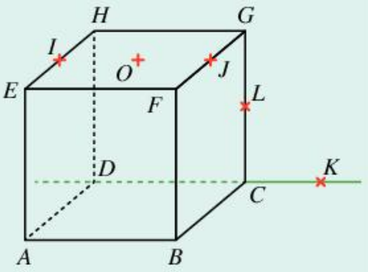




Méthode 1 Étudier la position relative de deux droites

On considère un cube $ABCDEFGH$. I, J et L sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[FG]$ et $[GC]$.

O et K sont deux points tels que $\overrightarrow{IO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.



Étudier les positions relatives des couples de droites suivants.

1. (IO) et (DK).
2. (BJ) et (EF).
3. (JL) et (BC).

Solution commentée

1. $\overrightarrow{IO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DK}$, donc les vecteurs directeurs des droites (IO) et (DK) sont colinéaires. Ces droites sont donc parallèles.

2. Les points B, J, E et F ne sont pas coplanaires car, sinon, le point B appartiendrait au plan (EFJ). Les droites (BJ) et (EF) ne le sont donc pas non plus : leur intersection est donc vide.

3. J, L, B et C sont quatre points coplanaires, donc les droites (JL) et (BC) sont coplanaires. Elles ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes.

EXERCICE 20 p. 328

Méthode 2 Construire l'intersection d'une droite et d'un plan, de deux plans

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on note :

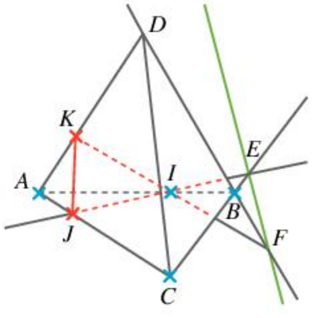
- I le point de $[AB]$ tel que $AI=\frac{2}{3}AB$;
- J le point de $[AC]$ tel que $AJ=\frac{1}{4}AC$;
- K le point de $[AD]$ tel que $AK=\frac{1}{3}AD$.

1. Démontrer que la droite (IJ) est sécante au plan (BCD) en un point. On note ce point E.
2. Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont sécants et déterminer leur droite d'intersection.

Solution commentée

1. Les droites (IJ) et (CB) sont incluses dans le plan (ABC) et $\frac{AI}{AB}\neq\frac{AJ}{AC}$, donc (IJ) et (CB) ne sont pas parallèles.

   Elles sont donc sécantes en un point. On note ce point E.
   E appartient à la droite (BC) incluse dans le plan (BCD), donc E appartient au plan (BCD). Enfin, (IJ) n'est pas incluse dans le plan (BCD).
   Donc (IJ) et (BCD) sont sécants au point E.



2. • Les plans (IJK) et (BCD) ne sont pas confondus et contiennent le point E. Donc ils sont sécants en une droite qui passe par E.
   • La droite (KI) est incluse dans le plan (ABD). Comme dans la question 1, on construit le point F, intersection de (KI) avec (BD), donc avec le plan (BCD).
   L'intersection des plans (IJK) et (BCD) est donc la droite (EF).

4. Repères de l'espace

1. Base de l'espace

Définition

Une **base de l'espace** est formée d'un triplet de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non coplanaires.

Remarque

Les vecteurs d'une base sont tous non nuls et non colinéaires deux à deux.

Propriété et définition

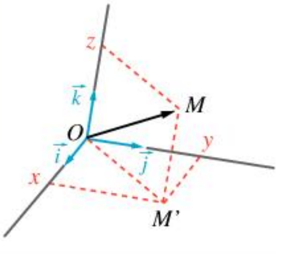
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$(x\,;y\,;z)$ sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans cette base. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. Repère de l'espace

Définition

Un **repère de l'espace** est formé d'un point donné O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un tel repère. O est l'**origine** du repère.



Remarque

En changeant l'ordre des vecteurs, on change le repère !

Propriété et définition

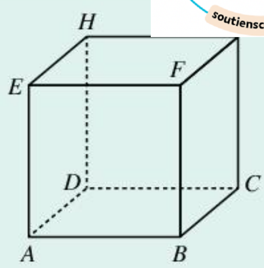
Soit $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
$(x\,;y\,;z)$ sont les **coordonnées** de M dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
x est l'**abscisse** de M ; y est l'**ordonnée** de M ; z est la **cote** de M. On note $M(x\,;y\,;z)$.

Propriétés

Soit $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, k un réel et $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ deux points de l'espace.

- Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$; $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Méthode 1 Décomposer un vecteur dans une base



On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

1. Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. Justifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. En déduire leurs coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
   a. $\overrightarrow{AH}$ **b.** $\overrightarrow{BH}$

Solution commentée

1. Par construction du cube, le point C n'appartient pas au plan (ABE), donc les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires. Donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

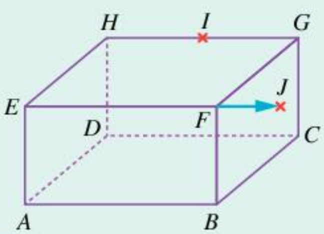
2. **a.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \vec{v} - \vec{u} + \vec{w} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Donc, dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   b. $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{BH} = \vec{w} - \vec{u} + \vec{v} - \vec{u} = -2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

   Donc, dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 27 p. 329

Méthode 2 Déterminer des coordonnées dans un repère



On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ représenté ci-contre. On note I le milieu du côté $[GH]$ et J le point tel que $\overrightarrow{EJ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}$.

1. Justifier que $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
2. Donner, sans justifier, les coordonnées des points A, B, D et E.
3. Déterminer les coordonnées des points G, H, I et J. Justifier.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{HB}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Solution commentée

1. Par construction du pavé droit, le point D n'appartient pas au plan (ABE) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires et forment une base. $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est donc un repère de l'espace.

2. $A(0\,;0\,;0)$; $B(1\,;0\,;0)$; $D(0\,;1\,;0)$; $E(0\,;0\,;1)$.

3. • $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $G(1\,;1\,;1)$.
   • $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} = 0\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, car $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$, donc $H(0\,;1\,;1)$.
   • I est le milieu de $[HG]$, donc $x_I = \dfrac{x_H + x_G}{2} = \dfrac{1}{2}$; $y_I = \dfrac{y_H + y_G}{2} = 1$; $z_I = \dfrac{z_H + z_G}{2} = 1$, donc $I\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;1\right)$.
   • $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{EF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF} + 0\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $J\left(\frac{4}{3}\,;0\,;1\right)$.

4. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x_G - x_A\\y_G - y_A\\z_G - z_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   On a alors $2\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, donc $\vec{u} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{HB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$.