MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 11

Connaître le cours

1. Suites de matrices

1. Suite de matrices colonnes

Définition

Soit n un entier naturel. On appelle suite de matrices colonnes, notée (U_n), des matrices colonnes dont tous les éléments sont des termes de suites numériques.

Exemple

La suite (U_n) définie par $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ 2n-1 \end{pmatrix}$ est une suite de matrice dont les coefficients sont les suites numériques (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n par $a_n = n^2$ et $b_n = 2n-1$.

Remarque

On peut définir de manière analogue les suites de matrices lignes.

Définition

On dit qu'une suite de matrices (U_n) converge si et seulement si tous ses éléments (constitués de termes de suites numériques) convergent. La limite de la suite (U_n) est alors la matrice ayant pour coefficients les limites de chaque terme de (U_n).

Remarque

Dans les autres cas, on dit que la matrice diverge.

Exemples

- La suite (U_n) définie par $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ 2n-1 \end{pmatrix}$ est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-1 = +\infty$.
- La suite (U_n) définie par $U_n = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ est convergente et sa limite est la matrice $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Suites de matrices définies par des relations de récurrence

Propriété

DÉMO p. 239

Soient A une matrice carrée d'ordre p (p entier naturel) et (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes telles que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = AU_n$. Alors, pour tout entier naturel n, on a : $U_n = A^n U_0$.

Exemple

(a_n) et (b_n) sont deux suites définies par $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ et $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + b_n \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$.

Alors $U_5 = A^5 U_0$. On effectue ensuite le calcul à la calculatrice et on obtient $U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -22 \end{pmatrix}$.

Propriété

DÉMO en ligne

Soient A une matrice carrée d'ordre p, B une matrice colonne à p lignes et (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes, telles que pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1} = AU_n + B$.
Si la suite (U_n) converge alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant $U = AU + B$.
La matrice U est appelée état stable de la suite (U_n).

Exercice résolu 1 Calculer les termes d'une suite en utilisant l'écriture matricielle de la relation de récurrence

On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n par les relations de récurrence $a_{n+1} = 2a_n - 3b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + b_n$ et telles que $a_2 = 1$ et $b_2 = 23$.
Calculer a_0, b_0, puis a_5, b_5.

Solution commentée

On définit, pour tout entier naturel n, la matrice $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Les relations de récurrence s'écrivent aussi, pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = AU_n$ où A est la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement à la calculatrice que la matrice A est inversible.

On connaît $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \end{pmatrix}$ et comme $U_2 = A^2 U_0$, on en déduit $U_0 = (A^{-1})^2 \times U_2$.

On effectue les calculs à la calculatrice et on obtient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc $a_0 = 1$ et $b_0 = -1$.

Alors on utilise l'égalité $U_5 = A^5 U_0$; on obtient $U_5 = \begin{pmatrix} 293 \\ -1\,101 \end{pmatrix}$ et donc $a_5 = 293$ et $b_5 = -1101$.

Exercice résolu 2 Étudier une suite du type $U_{n+1} = AU_n + B$

Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1 Déterminer une matrice colonne U telle que $U = AU + B$.

2 On pose $V_n = U_n - U$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$; en déduire l'expression de V_n en fonction de n.

3 On admet que pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ -n0{,}5^n & 0{,}5^n \end{pmatrix}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n0{,}5^n = 0$.

Déduire de ce qui précède l'expression de U_n en fonction de n et étudier sa limite.

Solution commentée

1 $U = AU + B \Leftrightarrow U - AU = B \Leftrightarrow (I_2 - A)U = B$ et alors $U = (I_2 - A)^{-1} B$.

$I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Avec la calculatrice, on obtient $(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, puis $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2 $V_{n+1} = U_{n+1} - U = AU_n + B - AU - B = A(U_n - U) = AV_n$.

On a alors $V_n = A^n V_0$ pour tout entier naturel n, avec $V_0 = U_0 - U = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3 $V_n = U_n - U \Leftrightarrow U_n = V_n + U$ d'où $U_n = A^n V_0 + U$

On a donc $U_n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ -n0{,}5^n & 0{,}5^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times 0{,}5^n + 4 \\ 3n \times 0{,}5^n + 4 \times 0{,}5^n - 2 \end{pmatrix}$.

$0 \leqslant 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n0{,}5^n = 0$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = U$.

La matrice U est l'état stable de la suite (U_n).

2. Les chaînes de Markov

1. Graphe orienté pondéré

Définition

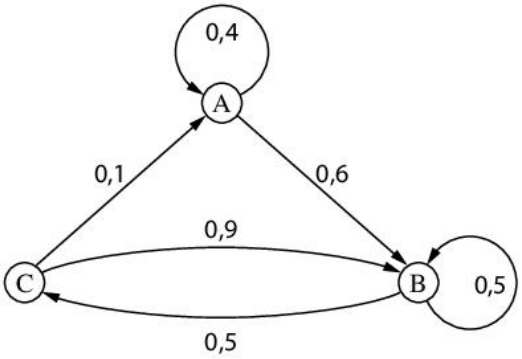
Un graphe orienté est pondéré lorsque chaque arête est affectée d'un nombre réel positif, appelé poids de cette arête.
Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré où tous les poids sont compris entre 0 et 1 et tel que la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

Remarque

Les sommets d'un graphe probabiliste sont appelés des états.

Exemple

Le graphe G ci-contre est un graphe probabiliste à trois états.



Définition

La matrice associée à un graphe probabiliste comportant p sommets s'appelle une matrice de transition. C'est une matrice carrée d'ordre p où le terme de la i-ème ligne et j-ième colonne est égale au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j si elle existe, 0 sinon.

Remarques

- Si les sommets du graphe sont des lettres, on numérote ces sommets dans l'ordre alphabétique.
- Dans la matrice de transition, la somme des termes appartenant à une même ligne est égale à 1.

Exemple

La matrice de transition du graphe G précédent est la matrice $P=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Chaîne de Markov à deux ou trois états

Définition

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) permettant de modéliser l'évolution par étapes successives d'un système aléatoire comportant différents états.
À l'étape $n=0$, la loi de probabilité de X_0 s'appelle la distribution initiale du système.
À l'étape n, la loi de probabilité de X_n s'appelle la distribution après n transitions.
Lorsque, à chaque étape, la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de n, on dit que la suite (X_n) est une chaîne de Markov.

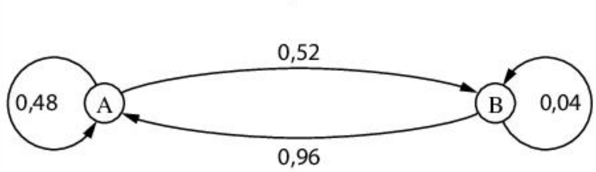
Remarque

On peut associer à une chaîne de Markov :
- un graphe probabiliste où les sommets sont les états du système aléatoire et le poids de chaque arête est égal à la probabilité de transition d'un état à un autre ;
- la matrice de transition de ce graphe probabiliste.

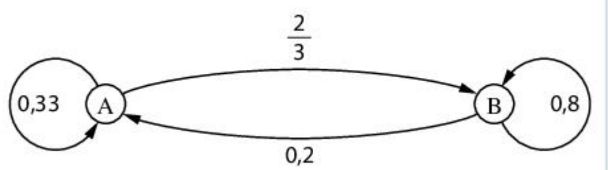
Exercice résolu 1 Graphes probabilistes et matrices

Les graphes suivants sont-ils probabilistes ? Si oui, donner la matrice de transition associée.

Graphe 1



Graphe 2



Solution commentée

Pour le graphe 1, tous les poids sont des nombres compris entre 0 et 1, la somme des poids des arêtes issues de A est $0{,}48+0{,}52=1$ et celle pour le sommet B est $0{,}96+0{,}04=1$. C'est donc un graphe probabiliste.

Sa matrice associée est $P=\begin{pmatrix}0{,}48 & 0{,}52\\ 0{,}96 & 0{,}04\end{pmatrix}$.

Le graphe 2 n'est pas probabiliste car pour le sommet A, $\frac{2}{3}+0{,}33=\frac{299}{300}\neq 1$.

Exercice résolu 2 Étudier une marche aléatoire

Un robot se déplace sur un triangle ABC. À chaque étape :

- s'il est en A, il choisit de façon aléatoire soit de rester en A, soit de se déplacer vers B ou C ;
- s'il est en B, il se déplace aléatoirement vers A ou C ;
- s'il est en C, il se déplace vers A.

On note X_n la variable aléatoire donnant la position du robot à l'étape n.

Au début de l'expérience, pour $n=0$, on place le robot en A.

1 Donner la distribution initiale du système, c'est-à-dire $P(X_0=A)$, $P(X_0=B)$ et $P(X_0=C)$.

2 À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la distribution du système après deux étapes.

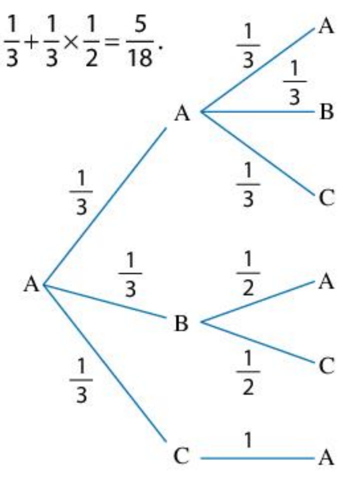
3 Expliquer pourquoi la suite (X_n) est une chaîne de Markov et donner le graphe probabiliste et la matrice associée.

Solution commentée

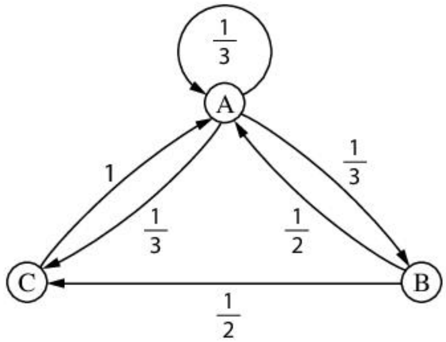
1 $P(X_0=\mathrm{A})=1$; $P(X_0=\mathrm{B})=0$ et $P(X_0=\mathrm{C})=0$.

2 En utilisant l'arbre pondéré ci-contre, on obtient :

$P(X_2=\mathrm{A})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{11}{18}$; $P(X_2=\mathrm{B})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$; $P(X_2=\mathrm{C})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$.



3 À chaque étape, la probabilité pour le robot de se déplacer vers l'un des sommets ne dépend pas de n, donc la suite (X_n) est une chaîne de Markov. Son graphe associé et sa matrice de transition sont :



et $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

3. Représentation d'une chaîne de Markov à l'aide d'une suite de matrices

1. Modélisation à l'aide d'une suite de matrice

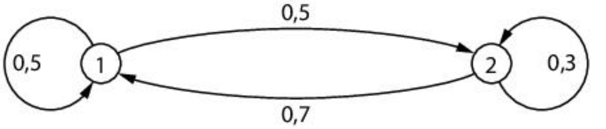
Propriété

DÉMO p. 238

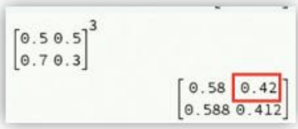
On considère une chaîne de Markov à 2 (respectivement à 3) états et P la matrice de transition associée.
Soient n, i et j trois entiers naturels tels que $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$ (respectivement $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$).
La probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est égale au terme de la i-ème ligne et j-ième colonne de la matrice P^n.

Exemple

On considère une marche aléatoire à deux états modélisée par le graphe probabiliste suivant et P la matrice de transition associée.



et $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.



Pour déterminer la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en 3 étapes, on calcule P^3 et on lit cette probabilité à l'intersection de la 1re ligne et 2e colonne qui est égale à **0,42**.

2. Étude asymptotique

Définition

On considère une chaîne de Markov à 2 (respectivement à 3) états et P la matrice de transition associée.
On note π_n la matrice ligne à 2 (respectivement 3) colonnes dont le terme de la j-ième colonne est la probabilité qu'à l'étape n la variable aléatoire X_n soit égale à j. Autrement dit :

$$\pi_n = \big(P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2)\big) \text{ (respectivement } \pi_n = \big(P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3)\big)\text{)}.$$

Remarque

La matrice π_0 représente la distribution initiale et la matrice π_n la distribution après n transitions.

Propriété

DÉMO p. 239

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\pi_{n+1} = \pi_n P$ et $\pi_n = \pi_0 P^n$.
S'il existe un entier n tel que la matrice P^n ne contient pas de 0 alors la suite (π_n) converge vers la matrice π vérifiant $\pi = \pi P$ et cette limite ne dépend pas de π_0.
On dit que la matrice π représente la distribution invariante du système.

Remarques

- Dire que la matrice P^n ne contient pas de 0 signifie qu'en n étapes on peut passer de n'importe quel état à n'importe quel autre.
- En particulier, si la matrice P ne contient pas de 0 alors la suite (π_n) converge.

Exercice résolu 1 Calculer des probabilités à l'aide de la matrice de transition

Un internaute navigue sur un réseau informatique contenant 3 pages Internet en cliquant successivement et aléatoirement sur un lien de chaque page.

La page 1 contient 2 liens : l'un menant à la page 2, l'autre à la page 3.

La page 2 contient 4 liens : trois menant à la page 3 et un à la page 1.

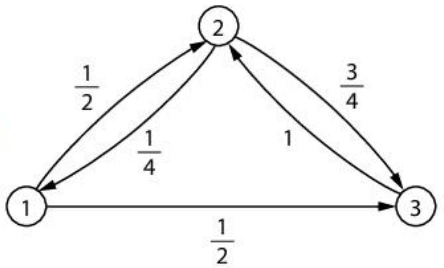
La page 3 contient un seul lien menant à la page 2.

1 Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition P associée.

2 L'internaute est sur la page 1 et effectue 9 clics, sur quelle page a-t-il le plus de chance d'arriver ?

Solution commentée

1



$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

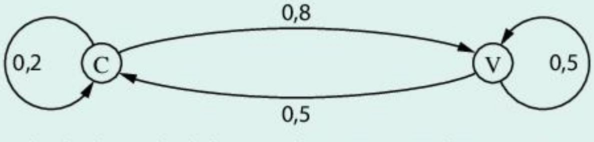
2 On calcule $P^9=\begin{pmatrix} \frac{249}{2\,048} & \frac{3\,745}{8\,192} & \frac{3\,451}{8\,192} \\ \frac{2\,569}{16\,384} & \frac{345}{1024} & \frac{8\,295}{16\,384} \\ \frac{147}{2\,048} & \frac{2\,569}{4\,096} & \frac{1233}{4\,096} \end{pmatrix}$.

Sur la première ligne $\frac{3\,745}{8\,192} > \frac{3\,451}{8\,192} > \frac{249}{2\,048}$,

donc la page la plus probable est la page 2.

Exercice résolu 2 Déterminer une distribution invariante

On a programmé un ordinateur pour qu'il affiche successivement des lettres qui sont soit des consonnes (C), soit des voyelles (V) selon le graphe probabiliste ci-contre.



1 On suppose que la première lettre est une consonne. Calculer la probabilité que la cinquième lettre soit une consonne

2 Déterminer la distribution invariante de ce système. Interpréter le résultat.

Solution commentée

1 La matrice de transition de cette chaîne de Markov est $P=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et la première lettre est une voyelle

soit $\pi_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\pi_5=\pi_1 P^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} 0{,}3896 & 0{,}6104 \end{pmatrix}$.

La probabilité que la cinquième lettre soit une consonne est donc égale à 0,3896.

2 $\pi=\pi P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}2x+0{,}5y & 0{,}8x+0{,}5y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.

Soit $\begin{cases} -0{,}8x+0{,}5y=0 \\ 0{,}8x-0{,}5y=0 \end{cases}$. Les deux équations obtenues sont équivalentes à $0{,}8x-0{,}5y=0$.

Par ailleurs $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$. Ainsi $0{,}8x-0{,}5(1-x)=0 \Leftrightarrow 1{,}3x=0{,}5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{13}$, puis $y=\frac{8}{13}$. Comme la matrice P ne contient pas de 0 alors les distributions de probabilités convergent vers cette distribution invariante. Ainsi, lorsque n tend vers $+\infty$, la probabilité d'obtenir une consonne tend vers $\frac{5}{13}$ et celle d'obtenir une voyelle $\frac{8}{13}$.