COURS HACHETTE

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 11

ORTHOGONALITE ET DISTANCE DANS L 'ESPACE

Connaître le cours

1. Produit scalaire dans l'espace

1. Extension du produit scalaire à l'espace

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les points A, B et C étant coplanaires, le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant les points A, B et C.

Remarque

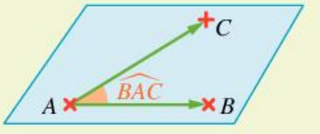
$\vec{u} \cdot \vec{v}$ ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis.

Propriétés

Soient A, B et C trois points de l'espace, B et C étant distincts de A.

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors :

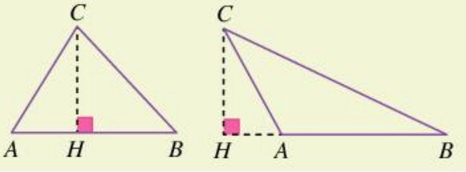
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$



- Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens ;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.



Remarque

En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\left(\widehat{BAB}\right) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$.

$\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^{\,2}$ et est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.

2. Propriétés algébriques du produit scalaire

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et k un nombre réel. On a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (bilinéarité)
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\| - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Corollaire (formules de polarisation)

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

3. Orthogonalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque

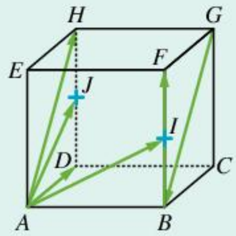
Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace car, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.

Méthode 1 Calculer des produits scalaires dans l'espace

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[DH]$.

Déterminer les produits scalaires suivants.

1 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}$ 2 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{GB}$
3 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BF}$ 4 $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BF}$



Solution commentée

1 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$, car D est le projeté orthogonal de J sur (AD) dans le plan (AJD).
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ}=AD^2=a^2$

2 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}$.
Or $ABCDEFGH$ est un cube, donc ses faces sont des carrés. Ainsi $\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{EH}=-\overrightarrow{GF}$, donc $\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{GB}$.
D'où $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{GB}=-AH^2=-\left(AE^2+EH^2\right)=-2a^2$ (d'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEH).

3 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AE}=AH\times AE\times\cos(45°)=a\sqrt{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$

4 $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AE}$, avec K projeté orthogonal de I sur (AE) dans le plan (AIE).
De plus, $AI^2=AB^2+BI^2=EF^2+FI^2=EI^2$, donc $AI=EI$. Le triangle AIE est donc isocèle en I et K est donc le milieu de $[AE]$. D'où $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AE}=AK\times AE=a\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{2}$.

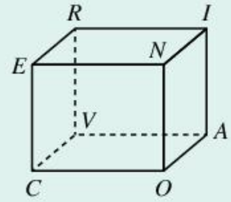
Méthode 2 Utiliser des propriétés du produit scalaire

On considère le pavé droit $COAVENIR$ ci-contre tel que :
$CO=5$, $CV=3$ et $CE=4$.

1 a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{NI}$.
b. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{EO}$ et $\overrightarrow{NI}$?

2 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{VI}\cdot\overrightarrow{RA}$.

3 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}$.



Solution commentée

1 a. $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{NI}=(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CO})\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}=0+0=0.$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{EO}$ et $\overrightarrow{NI}$ sont donc orthogonaux.

2 $\overrightarrow{VI}\cdot\overrightarrow{RA}=(\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{AI})\cdot(\overrightarrow{RV}+\overrightarrow{VA})=(\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{AI})\cdot(-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{VA})=VA^2-AI^2=5^2-4^2=9$

3 $\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}=(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{ON})\cdot(\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AO})=(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{ON})\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{AO})$

$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}=CO^2+0+0+0-ON^2+0$

$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{RO}=25-16=9$

2. Orthogonalité dans l'espace

1. Orthogonalité de deux droites

Définition

Soient d et d' deux droites de l'espace. d et d' sont **orthogonales** si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Propriété

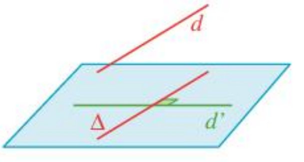
Deux droites d et d' de l'espace sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de d est orthogonal à tout vecteur directeur de d'.

Remarques

- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires.
- Dans l'espace, deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles sont sécantes selon un angle droit (c'est un cas particulier d'orthogonalité).
- Si deux droites sont perpendiculaires, alors elles sont orthogonales. La réciproque est fausse.

Propriétés

- Deux droites d et d' de l'espace sont orthogonales si et seulement s'il existe une droite Δ parallèle à d et perpendiculaire à d'.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.



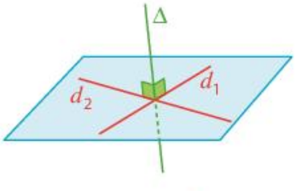
2. Orthogonalité d'un plan et d'une droite

Définition

Dans l'espace, soient $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$ et d une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.
La droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont **orthogonaux** (ou **perpendiculaires**) si $\vec{w}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

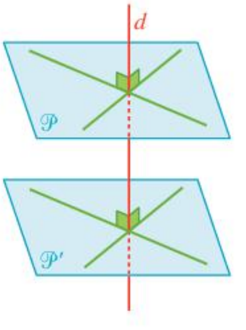
Propriétés

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

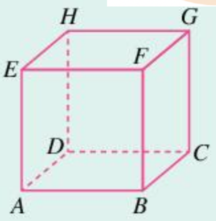


Propriétés

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.



Méthode 1 Montrer que deux droites sont orthogonales



$ABCDEFGH$ est un cube.

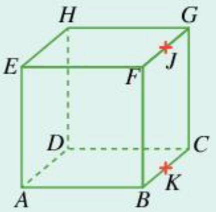
1. Montrer que les droites (FB) et (AC) sont orthogonales.
2. Montrer que les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.

Solution commentée

1. $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{BC}=0+0=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et, par conséquent, les droites (FB) et (AC) sont orthogonales.

2. Les faces d'un cube sont des carrés. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$ car $EFGH$ est un carré.
Donc $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{GC}=0$, car $DCGH$ est un carré. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont orthogonaux et, par conséquent, les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.

Méthode 2 Démontrer l'orthogonalité d'une droite et d'un plan



$ABCDEFGH$ est un cube. Les points J et K sont les milieux respectifs des segments $[FG]$ et $[BC]$.

- Démontrer que la droite (JK) est orthogonale au plan (ABC).

Solution commentée

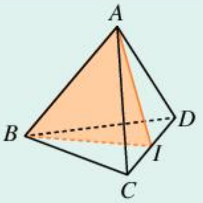
$\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BK})\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$, car $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FG}$.

D'où $\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, donc $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BK})\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$, car $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FG}$.

D'où $\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, donc $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
Donc, comme $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ est une base du plan (ABC) et que $\overrightarrow{JK}$ est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, on en déduit que la droite (JK) est orthogonale au plan (ABC).

Méthode 3 Utiliser l'orthogonalité d'une droite et d'un plan



$ABCD$ est un tétraèdre régulier (c'est-à-dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux). Le point I est le milieu du segment $[CD]$.

1. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABI).
2. En déduire que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales.

Solution commentée

1. ACD est un triangle équilatéral donc, comme I est le milieu de $[CD]$, la droite (AI) est la hauteur issue de A du triangle ACD. Ainsi, $(AI)\perp(CD)$. De la même manière, BCD est un triangle équilatéral donc, comme I est le milieu de $[CD]$, la droite (BI) est la hauteur issue de B du triangle BCD. Ainsi, $(BI)\perp(CD)$.
(CD) est donc orthogonale aux deux droites sécantes (AI) et (BI) du plan (ABI), elle est donc orthogonale au plan (ABI).

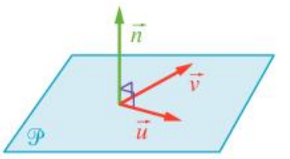
2. (CD) est orthogonale au plan (ABI). Elle est donc orthogonale à toute droite du plan (ABI), donc en particulier à la droite (AB).

3. Vecteur normal, projeté orthogonal

1. Vecteur normal à un plan

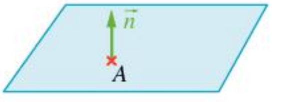
Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$. Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan $\mathcal{P}$ s'il est non nul et orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



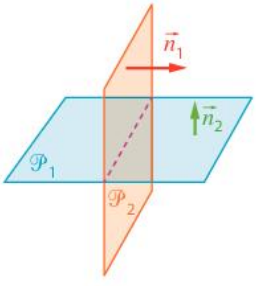
Propriété

Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



Définition

Soient $\mathcal{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathcal{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$. $\mathcal{P}_1$ est **perpendiculaire** à $\mathcal{P}_2$ si $\vec{n}_1$ est orthogonal à $\vec{n}_2$.

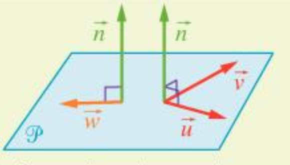


Remarques

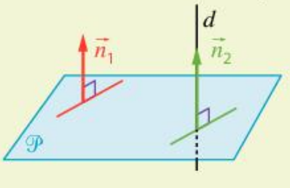
- Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal à un plan est aussi un vecteur normal à ce plan.
- Si deux vecteurs sont normaux à un même plan, alors ils sont colinéaires entre eux.

Propriétés

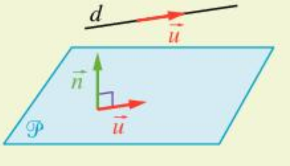
- Un vecteur est normal à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{P}$.



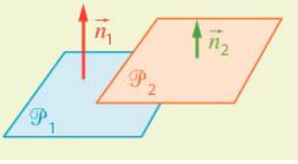
- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.



- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.



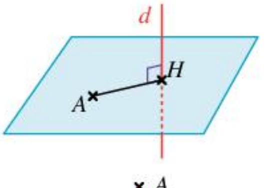
- Soient $\mathcal{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathcal{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$. $\mathcal{P}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$ si et seulement si $\vec{n}_1$ est colinéaire à $\vec{n}_2$.

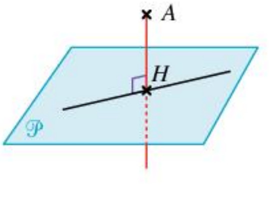


2. Projeté orthogonal d'un point

Propriétés et définitions

- Soient A un point et d une droite de l'espace. Il existe un unique plan passant par A et orthogonal à d. La droite d est alors sécante avec ce plan et leur point d'intersection est appelé **projeté orthogonal de A sur d**.
- Soient A un point et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Il existe une unique droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}$ est alors sécant avec cette droite et leur point d'intersection est appelé **projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$**.

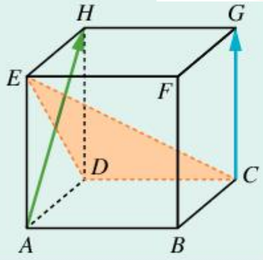




Méthode 1 Prouver qu'un vecteur est normal à un plan

$ABCDEFGH$ est un cube.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{CG}$ est normal au plan (FGH).
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal au plan (EDC).



Solution commentée

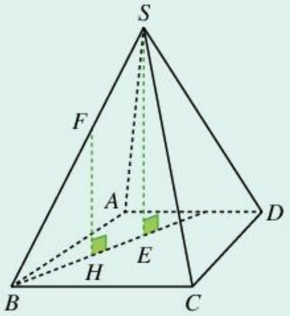
1. $ABCDEFGH$ est un cube, donc toutes ses faces sont des carrés.
Ainsi, $\overrightarrow{CG}$ est à la fois orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HG}$.
$(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{HG})$ étant une base du plan (FGH) et $\overrightarrow{CG}$ étant un vecteur non nul, $\overrightarrow{CG}$ est un vecteur normal au plan (FGH).

2. $EHDA$ est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires.
Ainsi, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}) \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 + 0 = 0$, donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.
Or $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DC})$ est une base du plan (EDC).
De plus, $\overrightarrow{AH}$ est non nul et orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{DC}$.
Donc $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal au plan (EDC).

Méthode 2 Prouver qu'un point est le projeté orthogonal d'un point sur un plan

$SABCD$ est un pyramide. E est le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC) et F est un point du segment $[SB]$.

- Démontrer que la parallèle d à (SE) passant par F coupe la droite (BE) en un point H qui est le projeté orthogonal de F sur (ABC).



Solution commentée

Comme le point E est le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC), la droite (SE) est orthogonale au plan (ABC).
Par conséquent, elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
Elle est donc perpendiculaire à la droite (BE) puisqu'elle la coupe en E.
Dans le plan (SBE), les droites d et (SE) sont parallèles.
Toujours dans le plan (SBE), comme la droite (BE) est perpendiculaire à la droite (SE), elle est également perpendiculaire à la droite d. Elle la coupe donc en un point H.
Par définition du projeté orthogonal, $\overrightarrow{SE}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
Comme $\overrightarrow{FH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{SE}$, c'est également un vecteur normal au plan (ABC).
Donc la droite (FH) est orthogonale au plan (ABC).
Ainsi, le point H, intersection de d et de (BE), appartient au plan (ABC) et la droite (FH) est orthogonale au plan (ABC).
Le point H est donc bien le projeté orthogonal du point F sur le plan (ABC).

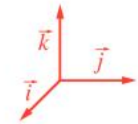
4. Calculs de distances

1. Calculs dans une base et un repère orthonormés de l'espace

Définition

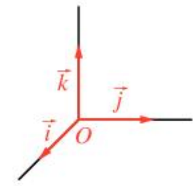
Une **base orthonormée** de l'espace est une base de l'espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.
Autrement dit, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée signifie que :

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \text{ et } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1.$$



Définition

Un **repère orthonormé** $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère tel que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit orthonormée.



Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Corollaire

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère deux points $A(x_A\,; y_A\,; z_A)$ et $B(x_B\,; y_B\,; z_B)$. On a alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

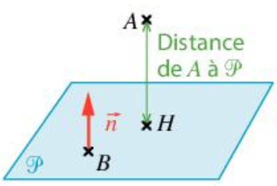
2. Propriétés

Propriétés et définition

Soient A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan passant par un point B et de vecteur normal $\vec{n}$.

- Le projeté orthogonal H de A sur le plan $\mathcal{P}$ est le point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche de A.
- La distance AH est appelée **distance du point A au plan $\mathcal{P}$**, et on a :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

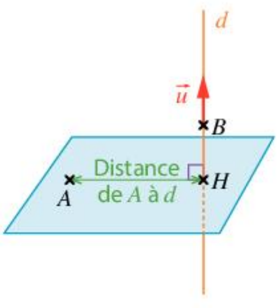


Propriétés et définition

Soient A un point de l'espace et d une droite de l'espace passant par un point B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

- Le projeté orthogonal H de A sur la droite d est le point de la droite d le plus proche de A.
- La distance AH est appelée **distance du point A à la droite d**, et on a :

$$AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u} \right\|.$$



Méthode 1 Calculer dans une base et un repère orthonormés de l'espace

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

1 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\14\\2\end{pmatrix}$. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 On considère les points $A(4\,;-2\,;0)$, $B(6\,;4\,;-2)$ et $C(12\,;6\,;0)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Solution commentée

1 $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times4 - 1\times14 + 3\times2 = 0$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 $AB = \sqrt{(6-4)^2+(4-(-2))^2+(-2+0)^2} = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

$AC = \sqrt{(12-4)^2+(6-(-2))^2+(0-0)^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(12-6)^2+(6-4)^2+(0-(-2))^2} = \sqrt{36+4+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

$AB = AC$ donc le triangle ABC est isocèle en B.

Méthode 2 Calculer la distance d'un point à un plan

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1. On note L, I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[EF]$ et $[HG]$ et K le centre du carré $BCGF$.

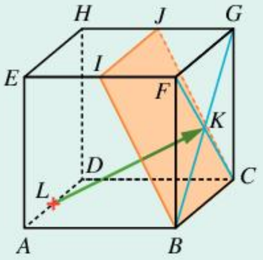
1 Citer une base orthonormée de l'espace en utilisant des points de la figure.

2 Citer deux repères orthonormés de l'espace en utilisant des points de la figure.

3 On se place dans le repère de l'espace $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ est normal au plan (IJB).

b. En déduire la distance du point L au plan (IJB).



Solution commentée

1 Par exemple $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

2 Par exemple $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ ou $(B\,;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BF})$.

3 a. Dans ce repère, on a $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $H(0;1;1)$ et $G(1;1;1)$.

Ainsi : $I\left(\frac{0+1}{2};\frac{0+0}{2};\frac{1+1}{2}\right)$, soit $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$. De la même manière, $J\left(\frac{1}{2};1;1\right)$ et $L\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

K, centre du carré $BCGF$, est donc le milieu de $[BG]$: $K\left(\frac{1+1}{2};\frac{0+1}{2};\frac{0+1}{2}\right)$, soit $K\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

D'où $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1-0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\1-0\\1-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\0-0\\0-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{IJ} = 1\times0+0\times1+\frac{1}{2}\times0 = 0$ et $\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{IB} = 1\times\frac{1}{2}+0\times0+\frac{1}{2}\times(-1) = 0$, donc $\overrightarrow{LK}$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IB}$. Or $(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB})$ est une base de (IJB), donc $\overrightarrow{LK}$, non nul, est normal au plan (IJB).

b. Soit M le projeté orthogonal du point L sur le plan (IJB). La distance du point L au plan (IJB) vaut :

$LM = \dfrac{|\overrightarrow{LB}\cdot\overrightarrow{LK}|}{\|\overrightarrow{LK}\|}$. Or $\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix}1-0\\0-\frac{1}{2}\\0-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{LB}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$. D'où $LM = \dfrac{\left|1\times1-\frac{1}{2}\times0+0\times\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.