COURS HACHETTE

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 12

REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES ET EQUATIONS CARTESIENNE

Connaître le cours

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Représentations paramétriques de droites

Soient a, b et c trois réels non nuls simultanément.

1. Caractérisation des points appartenant à une droite

Propriété

Soient $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

On considère la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et qui passe par le point A.
Soit $M(x\,;y;z)$ un point de l'espace.

Le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que : $\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$.

2. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété et définition

Soient α, β et γ trois réels.
L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système d'équations paramétriques $\begin{cases}x=\alpha+at\\y=\beta+bt\\z=\gamma+ct\end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels, est la droite $\mathcal{D}$ qui passe par le point $A(\alpha\,;\beta\,;\gamma)$ et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Ce système est une **représentation paramétrique** de $\mathcal{D}$.

Remarques

- Une droite peut être définie par la donnée d'une représentation paramétrique.
- Chaque valeur de t permet de déterminer les coordonnées d'un point de la droite. Réciproquement, à chaque point de la droite correspond une valeur de t.
- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques : en prenant un autre vecteur directeur ou un autre point de cette droite, on obtient une nouvelle représentation paramétrique.

Exemple

Soit $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$ qui passe par le point $A(5\,;-2\,;-1)$.

Une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases}x=5-t\\y=-2+4t\\z=-1+3t\end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels.

Pour $t=0$, on retrouve les coordonnées du point A.
On cherche les coordonnées d'un point de la droite autre que A.

Pour $t=1$, on obtient : $\begin{cases}x=5-1\\y=-2+4\\z=-1+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\\z=2\end{cases}$

Le point $C(4\,;2\,;2)$ appartient donc à $\mathcal{D}$.

Méthode 1 Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

On considère la droite $\mathscr{D}$ qui passe par le point $A(-3\,;-1\,;\,2)$ et le point $B(-2\,;-2\,;\,6)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.
2. Le point $C(3\,;\,5\,;-1)$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$?

Solution commentée

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ est $\begin{cases}x = x_A + at\\ y = y_A + bt\\ z = z_A + ct\end{cases}$, où t décrit l'ensemble des réels. Cela équivaut à $\mathscr{D}:\begin{cases}x=-3+t\\ y=-1-t\\ z=2+4t\end{cases}$, où $t\in\mathbb{R}$.

2. $C\in\mathscr{D} \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}3=-3+t\\ 5=-1-t\\ -1=2+4t\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}6=t\\ 6=-t\\ -3=4t\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases}t=6\\ t=-6\\ t=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$

La dernière proposition est fausse donc, par équivalences, la première est fausse également. Donc le point C n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

Méthode 2 Exploiter une représentation paramétrique de droite

Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases}x=1+3t\\ y=8-2t\\ z=6t\end{cases}$, où t décrit $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de cette droite.
2. La droite Δ est-elle parallèle à la droite $\mathscr{D}$ dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$?

Solution commentée

1. D'après le cours, une représentation paramétrique de la droite Δ est de la forme $\begin{cases}x=\alpha+at\\ y=\beta+bt\\ z=\gamma+ct\end{cases}$, où t décrit $\mathbb{R}$.

Le point $A(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ est un point de la droite et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette même droite. On identifie les différents nombres : $\alpha=1$, $\beta=8$ et $\gamma=0$, donc le point A a pour coordonnées $(1\,;\,8\,;\,0)$. De même, $a=3$, $b=-2$ et $c=6$, donc $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$. On remarque que les coordonnées de A s'obtiennent en posant $t=0$. En fixant une autre valeur de t, on obtient les coordonnées d'un autre point.

2. Δ est parallèle à $\mathscr{D} \Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v} \Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\begin{cases}3=k\\ -2=-2k\\ 6=k\end{cases}$.

La dernière proposition est fausse. Par équivalences, la première l'est aussi. Les droites Δ et $\mathscr{D}$ ne sont donc pas parallèles.

Connaître le cours

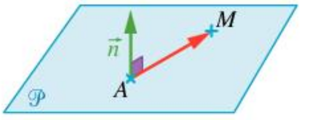
2. Équations cartésiennes de plans

1. Caractérisation des points d'un plan par le produit scalaire

Propriété

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Soient A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Un point M de l'espace appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$



Remarque

Un plan peut être défini par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.

Exemple

Soit $\mathcal{P}$ le plan qui passe par le point $B(1\,;\,-1\,;\,5)$ et qui admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

On cherche à déterminer si le point $D(3\,;\,0\,;\,3)$ appartient à $\mathcal{P}$. On a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

$D \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2\times2+1\times1+(-2)\times(-3)=0 \Leftrightarrow 4+1+6=0 \Leftrightarrow 11=0$

La dernière proposition est fausse donc, par équivalences, la première l'est aussi.

Le point D n'appartient donc pas au plan $\mathcal{P}$.

2. Équation cartésienne d'un plan

Soient a, b et c trois réels non tous nuls.

Propriétés et définition

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points de l'espace dont les cordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient l'équation :

$$ax+by+cz+d=0, \text{ où } d=-ax_A-by_A-cz_A.$$

Cette équation est une **équation cartésienne** du plan $\mathcal{P}$.

Remarque

Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes : en choisissant un autre vecteur normal ou un autre point de ce plan, on obtient une nouvelle équation cartésienne.

Propriété

Soit d un réel.

L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by+cz+d=0$ est un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Exemple

L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $3x-2y+4z+1=0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Remarque

Un plan peut être défini par la donnée d'une de ses équations cartésiennes.

Méthode 1 Déterminer une équation cartésienne d'un plan

1 On considère le plan $\mathcal{P}$ qui passe par le point $C(3\,;-2\,;\,5)$ et dont le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal. Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

2 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$, parallèle au plan $\mathcal{P}$ et qui passe par l'origine du repère.

Solution commentée

1 D'après le cours, $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, donc $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $-5x+3y+z+d=0$, où d est un réel.
De plus $C(3\,;-2\,;\,5)$ appartient à $\mathcal{P}$, donc les coordonnées du point C vérifient l'équation ci-dessus.
Cela donne $-5\times3+3\times(-2)+5+d=0 \Leftrightarrow -15-6+5+d=0 \Leftrightarrow -16+d=0 \Leftrightarrow d=16$.
Donc, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $-5x+3y+z+16=0$.
On aurait aussi pu utiliser l'équivalence $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}=0$ pour trouver l'équation cartésienne ci-dessus.

2 Le plan $\mathcal{R}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, donc tout vecteur normal à $\mathcal{P}$ est un vecteur normal à $\mathcal{R}$. On en déduit que $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{R}$, donc une équation cartésienne de $\mathcal{R}$ est de la forme :

$$-5x+3y+z+d=0, \text{ où } d \text{ est un réel.}$$

De plus, le plan $\mathcal{R}$ passe par l'origine du repère, donc $-5\times0+3\times0+0+d=0 \Leftrightarrow 0+d=0 \Leftrightarrow d=0$.
Donc une équation cartésienne de $\mathcal{R}$ est $-5x+3y+z=0$.

Méthode 2 Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne

On considère les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ définis respectivement par les équations cartésiennes suivantes.

$$\mathcal{P}_1 : -3x+2y+5z+1=0\,; \quad \mathcal{P}_2 : 2x+y+z=0\,; \quad \mathcal{P}_3 : y-z+5=0$$

1 On considère le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-200\\200\end{pmatrix}$. À quel plan ce vecteur est-il normal ?

2 Quelle est la position relative des plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$?

Solution commentée

1 On commence par déterminer un vecteur normal à chaque plan. D'après le cours, on identifie les coefficients de chacune des équations cartésiennes pour déterminer les coordonnées d'un vecteur normal.

Pour le plan $\mathcal{P}_1$, $a=-3$, $b=2$ et $c=5$, donc un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ est $\vec{n_1}\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$. Pour le plan $\mathcal{P}_2$, $a=2$, $b=1$ et $c=1$, donc un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ est $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

Pour le plan $\mathcal{P}_3$, $a=0$, $b=1$ et $c=-1$, donc un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$ est $\vec{n_3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

On constate que $\vec{w}=-200\,\vec{n_3}$, donc le vecteur $\vec{w}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n_3}$.
C'est donc un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_3$.

2 $\vec{n_2}\cdot\vec{n_3}=2\times0+1\times1+1\times(-1)=0$. Les vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont orthogonaux, donc les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont perpendiculaires.