COURS HACHETTE

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 13

LA LOI BINOMIALE

1. Succession d'épreuves indépendant

1. Univers d'une succession d'épreuves

Définition

Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes E_1, E_2, E_3, …, E_n, **l'univers des issues possibles** est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \ldots \times \Omega_n$, où Ω_i désigne l'univers de l'épreuve E_i pour i allant de 1 à n.

Une **issue** de la succession d'épreuves est donc un n-uplet $(i_1 ; i_2 ; i_3 ; \ldots ; i_n)$, où i_p est une issue de E_p.

Remarque

On représente cette situation par un arbre dans lequel un chemin correspond à une issue.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce équilibrée et à noter sa face, puis à piocher une carte dans un jeu de huit cartes et noter sa hauteur.

L'univers de la première épreuve est $U = \{P ; F\}$.

L'univers de la seconde épreuve est :

$V = \{7 ; 8 ; 9 ; 10 ; \text{valet} ; \text{dame} ; \text{roi} ; \text{as}\}$.

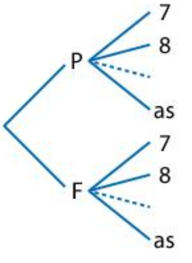
Les deux épreuves sont indépendantes l'une de l'autre car le résultat de la hauteur de la carte ne dépend pas de la face obtenue avec la pièce.

L'univers Ω de la succession des deux expériences précédentes est le produit cartésien des univers des expériences :

$\Omega = U \times V = \{(P ; 7) ; (P ; 8) ; \ldots ; (P ; \text{as}) ; (F ; 7) ; (F ; 8) ; \ldots ; (F ; \text{as})\}$

Il y a 16 issues possibles. C'est le nombre de branches finales de l'arbre.

On lit les issues en parcourant les chemins de l'arbre.



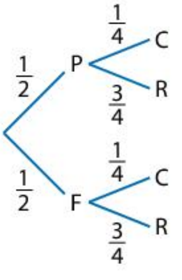
2. Calcul de probabilités

Propriété (admise)

Lors d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(i_1 ; i_2 ; i_3 ; \ldots ; i_n)$ est égale au produit des probabilités de chacune des issues du n-uplet.

Exemple

On considère une expérience aléatoire qui consiste à tirer une pièce équilibrée à Pile (P) ou Face (F), puis à choisir un jeton dans une urne contenant un jeton carré (C) et trois jetons ronds (R).



La probabilité de l'issue (F ; C) est alors égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

La probabilité d'obtenir un jeton carré est égale à :

$$P(C) = P((P ; C)) + P((F ; C)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Méthode 1 Reconnaître une succession d'épreuves indépendantes

On pioche trois pions dans une urne contenant cinq pions blancs et deux pions rouges et on note leurs couleurs. Il est possible de piocher ces trois pions de trois façons différentes.

- Méthode A : les trois simultanément.
- Méthode B : l'un après l'autre, sans remise.
- Méthode C : l'un après l'autre, avec remise.
- Une de ces méthodes correspond à une succession d'épreuves indépendantes. Laquelle ?

Solution commentée

- La méthode A présente un univers qui se compose du nombre de parties à trois éléments dans un ensemble à 7 éléments. Il y a donc $\binom{7}{3}$ issues. On ne reconnaît pas une succession d'épreuves.
- La méthode B correspond à une succession de trois épreuves (piocher un jeton l'un après l'autre) mais induit une modification de la composition de l'urne entre chaque épreuve : les deuxième et troisième épreuves sont donc dépendantes des précédentes.
- La méthode C est une succession de trois épreuves indépendantes (piocher un jeton) car, entre chaque pioche, l'urne reste identique, et chaque épreuve est indépendante de la précédente.

Méthode 2 Exploiter une succession d'épreuves indépendantes

À bord d'un bateau de longue traversée, le cuisinier pioche pour chaque repas au hasard dans le placard des féculents, qui contient 200 sacs de riz (événement R) et 300 sacs de pâtes (événement $\overline{R}$) ; puis au hasard dans le placard des protéines, qui contient 300 boîtes de thon (événement T), 200 boîtes de viande de veau (événement V) et 100 boîtes de viande de bœuf (événement B).

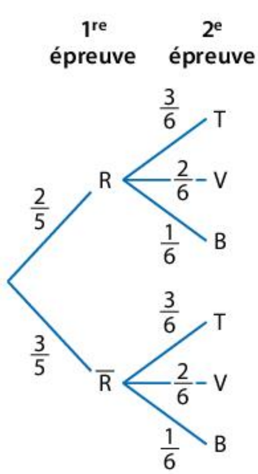
1. À l'aide du produit cartésien, lister les différents menus que le cuisinier peut proposer aux matelots.
2. Donner la probabilité de chacun des menus après avoir dressé un arbre représentant la situation.

Solution commentée

1. Le choix d'un menu repose sur la succession de deux épreuves indépendantes, car le choix se fait au hasard dans les deux placards. La première épreuve a pour univers $\Omega_1 = \{R\,;\overline{R}\}$ et la deuxième épreuve $\Omega_2 = \{T\,;V\,;B\}$. Les différents menus sont donc regroupés dans l'ensemble $\Omega_1 \times \Omega_2$, à savoir :

$$\{(R\,;T),(R\,;V),(R\,;B),(\overline{R}\,;T),(\overline{R}\,;V),(\overline{R}\,;B)\}.$$

2. La probabilité d'une issue se calcule en faisant le produit des probabilités écrites sur les branches qui mènent à cette issue



Issues

$(R\,;T) \longrightarrow P((R\,;T)) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

$(R\,;V) \longrightarrow P((R\,;V)) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

$(R\,;B) \longrightarrow P((R\,;B)) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$(\overline{R}\,;T) \longrightarrow P((\overline{R}\,;T)) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

$(\overline{R}\,;V) \longrightarrow P((\overline{R}\,;V)) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

$(\overline{R}\,;B) \longrightarrow P((\overline{R}\,;B)) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

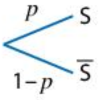
Connaître le cours

2. Schéma de Bernoulli et loi binomiale

1. Épreuve et schéma de Bernoulli

Définition

Soit p un réel compris entre 0 et 1. On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre p** une expérience aléatoire ayant deux issues : l'une nommée « succès » notée S, de probabilité p, et l'autre « échec » notée $\overline{S}$.



Propriété

Soit p un réel compris entre 0 et 1. La **loi** d'une épreuve **de Bernoulli** de paramètre p est donnée par le tableau ci-contre.

Issue	S	$\overline{S}$
Probabilité	p	$1-p$

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel compris entre 0 et 1.
Soit n un entier naturel non nul. On définit un **schéma de Bernoulli de paramètres n et p** lorsqu'on répète n fois de façon indépendante cette épreuve de Bernoulli.

Remarque

Si l'on définit X comme la variable aléatoire égale au nombre de succès dans ce schéma, X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ n\}$.

2. Loi binomiale

Soient n entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1.

Définition

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans ce schéma.
On dit alors que X suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$.

Propriété

La loi de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p est donnée, pour tout entier k compris entre 0 et n, par $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

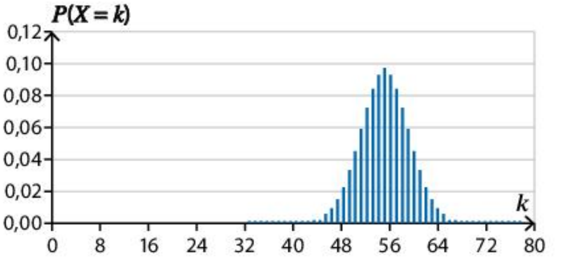
Propriétés

Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors :
- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$
- $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons en mettant en abscisse les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnée les probabilités correspondantes.

Exemple

La représentation graphique de la loi binomiale $\mathscr{B}(80\ ;\ 0{,}7)$ est donnée ci-contre.



Méthode 1 Reconnaître un schéma de Bernoulli

Pourquoi l'énoncé suivant peut-il être modélisé par un schéma de Bernoulli ?
« Une urne contient six boules indiscernables au toucher : quatre vertes et deux jaunes.
On tire successivement au hasard deux boules de l'urne, en prenant soin de remettre la première boule tirée dans l'urne. On s'intéresse au nombre de boules vertes tirées. »

Solution commentée

On répète deux fois une épreuve de Bernoulli (il y a deux issues uniquement à chaque tirage) avec une répétition identique et indépendante. En effet, la première boule tirée ne change pas la composition de l'urne avant le deuxième tirage, puisqu'il y a remise. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{4}{6}$.

EXERCICE 9 p. 420

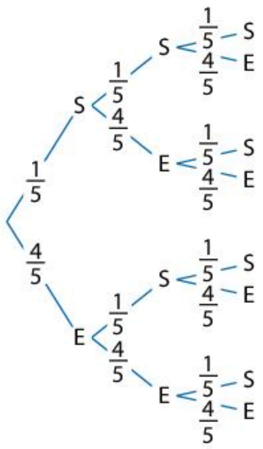
Méthode 2 Déterminer une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{5}$.

- Donner la loi de X.

Solution commentée

On note S le succès et E l'échec.



$$P(X=0) = \binom{3}{0} \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 1 \times \frac{64}{125} = \frac{64}{125}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{5} \times \frac{16}{25} = \frac{48}{125}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{25} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{125}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{125} = \frac{1}{125}$$

On obtient donc la loi de X dans le tableau suivant.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

Méthode 3 Étudier une situation avec une loi binomiale

Un sac contient 150 jetons indiscernables au toucher dont 105 sont gris et les autres sont marron.
On tire au hasard, successivement et avec remise, dix jetons de ce sac.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux jetons gris.
2. Si l'on répète un grand nombre de fois cette expérience, combien de jetons gris obtient-on en moyenne ?

Solution commentée

1. On répète dix fois la même épreuve de Bernoulli (dont le succès est « obtenir un jeton gris ») de paramètre $p = \frac{105}{150} = 0{,}7$; donc on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}7$. La variable aléatoire X comptant le nombre de jetons gris obtenus suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0{,}7)$. On cherche $P(X \geqslant 2)$.
$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{10}{1} \times 0{,}7^0 \times 0{,}3^{10} - \binom{10}{1} \times 0{,}7^1 \times 0{,}3^9 \approx 0{,}9999$$
La probabilité d'obtenir au moins deux jetons gris est donc d'environ 0,9999.

2. Cela revient à calculer l'espérance de la variable X : $E(X) = 10 \times 0{,}7 = 7$. Si l'on réitère un grand nombre de fois cette expérience, on obtient sept jetons gris en moyenne par expérience.