MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 2

Connaître le cours

1. Image d'un nombre complexe et affixe

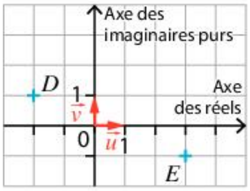
1. Affixe d'un point

Définitions

On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
À tout nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels, on associe le point $M(x\,;y)$ du plan complexe.
Réciproquement, à tout point $M(x\,;y)$ du plan complexe, on associe le nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$.
On dit que le point M est le **point image** du nombre complexe z et que z est l'**affixe** du point M.

Remarques

- L'axe des abscisses est appelé **axes des réels** et l'axe des ordonnées, **axe des imaginaires purs**.
- À chaque point du plan correspond un nombre complexe unique et réciproquement. On parle de bijection entre le plan complexe et l'ensemble des nombres complexes. On assimile souvent ces deux ensembles.



Exemples

- Le point D a pour affixe $-2+\mathrm{i}$.
- Le point image du nombre complexe $3-\mathrm{i}$ est le point E.

Propriétés

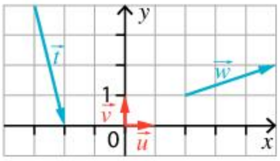
DÉMO en ligne

Soient A et B deux points du plan complexes d'affixes respectives z_A et z_B.
- Les points A et B sont confondus si et seulement si $z_A=z_B$.
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

2. Affixe d'un vecteur

Définitions

À tout nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels, on associe le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan complexe. On dit que le vecteur $\vec{w}$ est le **vecteur image** du nombre complexe z et que z est l'**affixe** du vecteur $\vec{w}$.



Exemples

- Le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $3+\mathrm{i}$.
- Le vecteur image du nombre complexe $1-4\mathrm{i}$ est le vecteur $\vec{t}$.

Propriétés

DÉMO en ligne

Dans le plan complexe, on considère $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z' et k un réel.
- Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont égaux si et seulement si $z=z'$.
- Le vecteur $\vec{w}+\vec{w}'$ a pour affixe $z+z'$.
- Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz.

3. Lien entre affixe d'un point et affixe d'un vecteur

Propriétés

DÉMO en ligne

- Soient M un point du plan complexe muni d'un repère d'origine O et z un nombre complexe.

Le point M a pour affixe z si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z.

- Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.

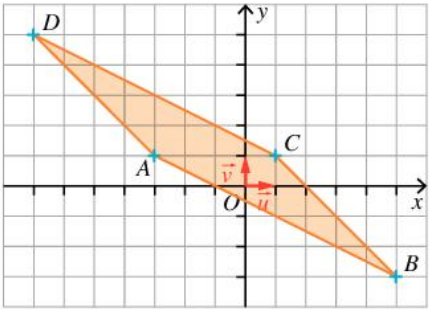
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe z_B-z_A.

Exercice résolu 1 Utiliser des affixes de points

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -3+\mathrm{i}$, $z_B = 5-3\mathrm{i}$, $z_C = 1+\mathrm{i}$ et $z_D = -7+5\mathrm{i}$.

1. Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

Solution commentée



1. Il semble que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

2. Le milieu I du segment $[AC]$ a pour affixe :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-3+\mathrm{i}+1+\mathrm{i}}{2} = \frac{-2+2\mathrm{i}}{2} = -1+\mathrm{i}$$

Le milieu J du segment $[BD]$ a pour affixe :

$$z_J = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{5-3\mathrm{i}-7+5\mathrm{i}}{2} = \frac{-2+2\mathrm{i}}{2} = -1+\mathrm{i}$$

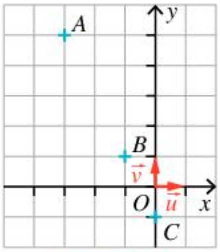
Les points I et J ont même affixes, ils sont donc confondus. Ainsi, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu. Le quadrilatère $ABCD$ est donc bien un parallélogramme.

Exercice résolu 2 Utiliser des affixes de vecteurs

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3+5\mathrm{i}$, $z_B = -1+\mathrm{i}$ et $z_C = -\mathrm{i}$.

1. Placer ces points dans le plan complexe et émettre une conjecture.
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

Solution commentée



1. Les points A, B et C semblent alignés.

2. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1+\mathrm{i}-(-3+5\mathrm{i}) = 2-4\mathrm{i}$, $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -\mathrm{i}-(-3+5\mathrm{i}) = 3-6\mathrm{i}$

On a donc $z_{\overrightarrow{AC}} = \frac{3}{2} z_{\overrightarrow{AB}}$ soit $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et par suite, les points A, B et C sont bien alignés.

Exercice résolu 3 Déterminer un ensemble de points

Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que $\frac{\mathrm{i}}{z+1}$ soit un nombre réel.

Solution commentée

$\frac{\mathrm{i}}{z+1}$ existe si et seulement si $z \neq -1$. Soit z un nombre complexe différent de -1. On pose $z = x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels.

$$\frac{\mathrm{i}}{z+1} = \frac{\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}y+1} = \frac{\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y+1)}{(x+1+\mathrm{i}y)(x+1-\mathrm{i}y)} = \frac{x\mathrm{i}+y+\mathrm{i}}{(x+1)^2+y^2} = \frac{y}{(x+1)^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$$

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{i}}{z+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ (x\,;y) \neq (-1;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ (x\,;y) \neq (-1;0) \end{cases}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ cherché est donc la droite d'équation $x=-1$ privée du point d'affixe -1.

2. Module d'un nombre complexe

1. Définition

Définition

Soient z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).

On appelle **module** de z le nombre réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

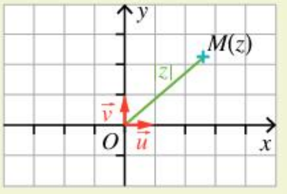
Remarques

- Si z est un réel, le module de z est égal à la valeur absolue de z (d'où la notation analogue).
- Le module d'un nombre complexe est un réel positif.

Interprétations géométriques

Propriétés

- Soient z un nombre complexe et M le point image associé, dans le plan complexe muni d'un repère d'origine O. On a alors $OM = |z|$.
- Soient z un nombre complexe et $\vec{w}$ le vecteur image associé, dans le plan complexe. On a alors $\|\vec{w}\| = |z|$.
- Soient A et B deux points du plan complexe, d'affixes respectives z_A et z_B. On a alors $AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$.



2. Propriétés

DÉMO P. 39

Propriétés

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).

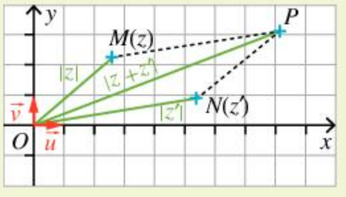
- $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
- $|z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$
- $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$

DÉMO P. 38

Propriétés : opérations et modules

Soient z et z' deux complexes.

- $|zz'| = |z||z'|$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$
- Si $z \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire) et
  $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ / z' = kz$ ou $z = kz'$ (cas d'égalité)



3. Ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1

Notation

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

Remarques

- $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.
- Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.

DÉMO P. 39

Propriétés de stabilité

- Si $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ alors $zz' \in \mathbb{U}$.
- Si $z \in \mathbb{U}^*$ alors $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.
- Si $(z, z') \in \mathbb{U}^* \times \mathbb{U}$ alors $\dfrac{z'}{z} \in \mathbb{U}$.

Exercice résolu 1 Déterminer des modules à l'aide de la définition

Calculer les modules des complexes suivants.

a. $z_1 = 5+\mathrm{i}$ **b.** $z_2 = -3+2\mathrm{i}$ **c.** $z_3 = 2-7\mathrm{i}$ **d.** $z_4 = -3-4\mathrm{i}$ **e.** $z_5 = -6$ **f.** $z_6 = 9\mathrm{i}$

Solution commentée

a. $|z_1| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$

b. $|z_2| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$

c. $|z_3| = \sqrt{2^2+(-7)^2} = \sqrt{53}$

d. $|z_4| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

e. $|z_5| = \sqrt{(-6)^2+0^2} = 6$

f. $|z_6| = \sqrt{0^2+9^2} = 9$

Exercice résolu 2 Déterminer des modules à l'aide de propriétés

Calculer les modules des complexes suivants.

a. $z_1 = (1+\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})$ **b.** $z_2 = (1+\mathrm{i})^{15}$ **c.** $z_3 = \dfrac{3-\mathrm{i}}{2+5\mathrm{i}}$ **d.** $z_4 = \dfrac{(-2+\mathrm{i})^5}{(5-3\mathrm{i})^4}$

Solution commentée

a. $|z_1| = |(1+\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})| = |1+\mathrm{i}||2-4\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+1^2} \times \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{20} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

b. $|z_2| = \left|(1+\mathrm{i})^{15}\right| = |1+\mathrm{i}|^{15} = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^{15} = \left(\sqrt{2}\right)^{15} = \left(\sqrt{2}\right)^{14} \times \sqrt{2} = 2^7 \times \sqrt{2} = 128\sqrt{2}$.

c. $|z_3| = \left|\dfrac{3-\mathrm{i}}{2+5\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|3-\mathrm{i}|}{|2+5\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{3^2+(-1)^2}}{\sqrt{2^2+5^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{29}} = \dfrac{\sqrt{10}\sqrt{29}}{29} = \dfrac{\sqrt{290}}{29}$.

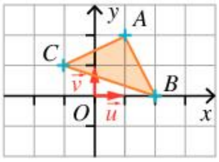
d. $|z_4| = \left|\dfrac{(-2+\mathrm{i})^5}{(5-3\mathrm{i})^4}\right| = \dfrac{\left|(-2+\mathrm{i})^5\right|}{\left|(5-3\mathrm{i})^4\right|} = \dfrac{|-2+\mathrm{i}|^5}{|5-3\mathrm{i}|^4} = \dfrac{\left(\sqrt{(-2)^2+1^2}\right)^5}{\left(\sqrt{5^2+(-3)^2}\right)^4} = \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^5}{\left(\sqrt{34}\right)^4} = \dfrac{5^2 \times \sqrt{5}}{34^2} = \dfrac{25\sqrt{5}}{1156}$.

Exercice résolu 3 Utiliser des modules pour démontrer

Soient $A(1+2\mathrm{i})$, $B(2)$ et $C(-1+\mathrm{i})$ dans le plan complexe.

1. Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du triangle ABC.
2. Démontrer ou invalider cette conjecture.

Solution commentée



1. Le triangle ABC semble rectangle isocèle en A.

2. $AB^2 = |2-(1+2\mathrm{i})|^2 = |1-2\mathrm{i}|^2 = 1^2+(-2)^2 = 5$

$AC^2 = |-1+\mathrm{i}-(1+2\mathrm{i})|^2 = |-2-\mathrm{i}|^2 = (-2)^2+(-1)^2 = 5$

$BC^2 = |-1+\mathrm{i}-2|^2 = |-3+\mathrm{i}|^2 = (-3)^2+1^2 = 10$

On a $AB = AC = \sqrt{5}$ donc le triangle ABC est isocèle en A.

On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en A.

Ainsi, le triangle ABC est bien rectangle isocèle en A.

3. Arguments d'un nombre complexe

1. Définition

Propriétés admises et définition

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).

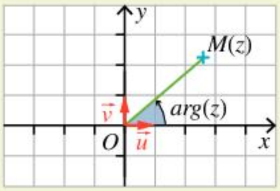
- Il existe des réels θ tels que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$.
- Les réels θ vérifiant ce système sont appelés **arguments** de z.
- z a une infinité d'arguments. Si θ est un argument d'un nombre complexe z, tous les autres sont de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note $\theta = \arg(z)\ (2\pi)$ et on lit « θ égal argument de z modulo 2π ».

Remarque

Le nombre complexe 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Interprétations géométriques

Propriétés admises



On se place dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

- Soient z un nombre complexe non nul et M le point image associé. $\arg(z)$ est alors une mesure en radian de l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$. On le note $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right) = \arg(z)\ (2\pi)$.
- Soient z un nombre complexe non nul et $\vec{w}$ le vecteur image associé. On a alors $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right) = \arg(z)\ (2\pi)$.
- Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.

On a alors $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)\ (2\pi)$.

2. Propriétés

Propriétés

DÉMO en ligne

Soit z un nombre complexe non nul.

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ (2\pi)$
- $\arg(-\overline{z}) = -\arg(z) + \pi\ (2\pi)$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0\ (\pi)$
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$

Propriétés : opérations et arguments

DÉMO en ligne

Soient z et z' deux complexes non nuls.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi)$
- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\ (2\pi)$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\arg\left(z^n\right) = n\arg(z)\ (2\pi)$

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Propriétés et définition

- Soient z un nombre complexe non nul, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ (2\pi)$.

Alors $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$. Une telle écriture s'appelle **forme trigonométrique** de z.

- Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. $z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') = \arg(z)\ (2\pi) \end{cases}$

Exercice résolu 1 Déterminer un argument d'un nombre complexe

Calculer un argument des nombres complexes suivants.

a. $z_1 = 5\mathrm{i}$ **b.** $z_2 = -3$ **c.** $z_3 = -2+2\mathrm{i}$ **d.** $z_4 = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$

Solution commentée

a. $5\mathrm{i}$ est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive donc $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

b. -3 est un réel strictement négatif donc $\arg(z_2) = \pi(2\pi)$

c. $|z_3| = |-2+2\mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Soit $\theta_3 = \arg(z_3)\ (2\pi)$. On a alors $\begin{cases} \cos(\theta_3) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_3) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Donc $\theta_3 = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.

d. $|z_4| = |-1+\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

Soit $\theta_4 = \arg(z_4)\ (2\pi)$. On a alors $\begin{cases} \cos(\theta_4) = \frac{-1}{2} \\ \sin(\theta_4) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Donc $\theta_4 = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.

Exercice résolu 2 Déterminer la forme algébrique et une forme trigonométrique de nombres complexes

1 Déterminer la forme algébrique des complexes suivants.

a. z_1 tel que $|z_1| = 2$ et $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ **b.** z_2 tel que $|z_2| = 4$ et $\arg(z_2) = \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$

2 Déterminer une forme trigonométrique des complexes suivants.

a. $z_3 = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ **b.** $z_4 = 2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$

Solution commentée

1 a. $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(0-\mathrm{i}) = -2\mathrm{i}$

b. $z_2 = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$

2 a. $|z_3| = |1+\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Soit $\theta_3 = \arg(z_3)\ (2\pi)$. On a alors $\begin{cases} \cos(\theta_3) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta_3 = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ et $z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

b. $|z_4| = |2\sqrt{3}-2\mathrm{i}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

Soit $\theta_4 = \arg(z_4)\ (2\pi)$. On a alors $\begin{cases} \cos(\theta_4) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_4) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$ donc $\theta_4 = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

Et $z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$