MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

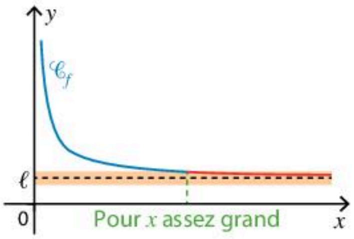
CHAPITRE 2

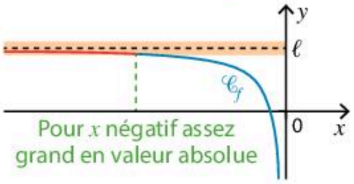
Limites et continuité des fonctions

Connaître le cours

1. Notion de limite en $+\infty$ et en $-\infty$

1. Limite finie





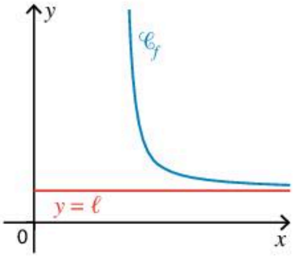
Définitions

- On dit que la fonction f **admet pour limite un réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$** si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de ℓ que l'on veut dès que x est assez grand.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que la fonction f **admet pour limite un réel ℓ lorsque x tend vers $-\infty$** si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de ℓ que l'on veut dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue.
On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Propriétés (admises)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

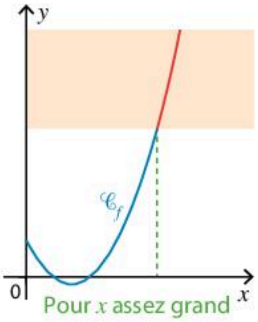
2. Représentation graphique



Définition

La droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

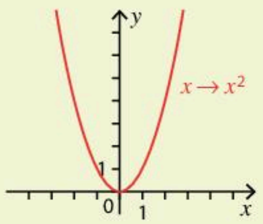
3. Limite infinie

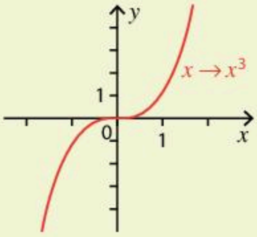


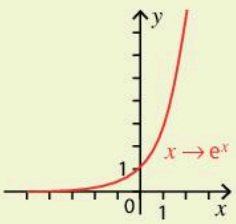
Définitions

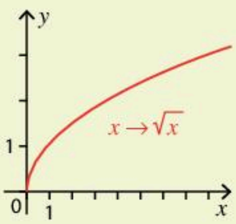
- On dit que la fonction f **admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** si $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes pour x assez grand.
- On dit que la fonction f **admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$** si $f(x)$ prend des valeurs négatives et de plus en plus grandes en valeur absolue dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue.

Propriétés (admises)





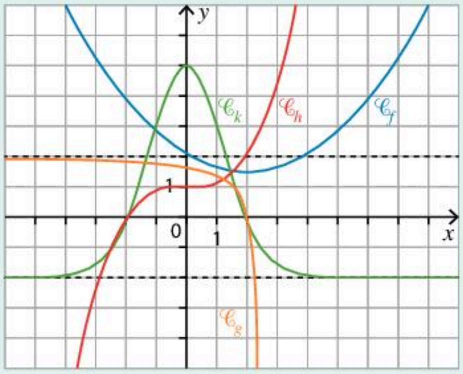




- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Méthode 1 Conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et $-\infty$ et les asymptotes horizontales

1. Conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions représentées ci-contre.
2. Certaines courbes admettent une asymptote horizontale : préciser lesquelles, déterminer une équation de l'asymptote et préciser si c'est une asymptote en $+\infty$ ou en $-\infty$.



Solution commentée

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = -2$

2. La fonction g admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$. La fonction k admet comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $y = -2$.

Méthode 2 Conjecturer à la calculatrice les limites et asymptotes

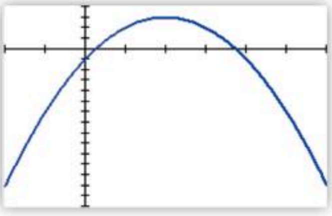
On considère trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = -(x-2)^2 + 3$; $g(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$; $h(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.

Pour chaque fonction, en traçant la courbe représentative avec la calculatrice :

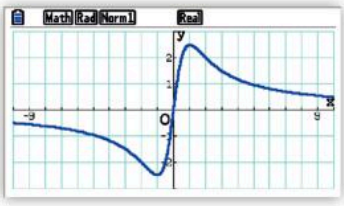
- conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$;
- donner les asymptotes horizontales éventuelles.

Solution commentée



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

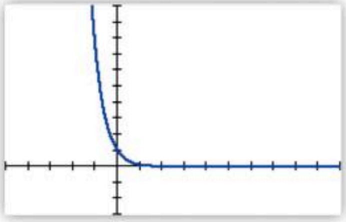
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

La fonction g admet comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $y = 0$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

La fonction h admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

2. Notion de limite en un réel a

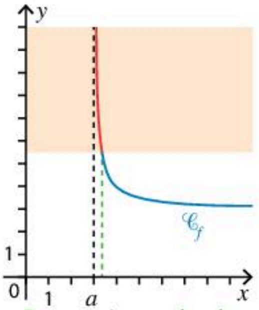
1. Limite infinie

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel.

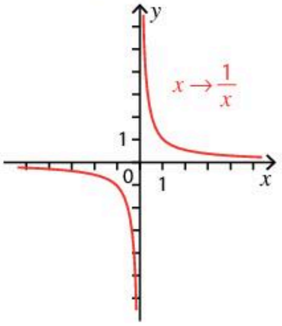
- On dit que la fonction f **admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a** si $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes pour x très proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

- On dit que la fonction f **admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers a** si $f(x)$ prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue pour x très proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.



Pour x très proche de a

Remarque



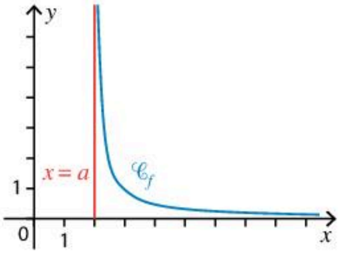
Une fonction peut avoir une **limite « à droite » et une limite « à gauche »** qui sont différentes.
Dans cet exemple, on note respectivement :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

2. Représentation graphique

Définition

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, on dit que la courbe représentative de la fonction f admet la droite d'équation $\boldsymbol{x = a}$ comme **asymptote verticale.**



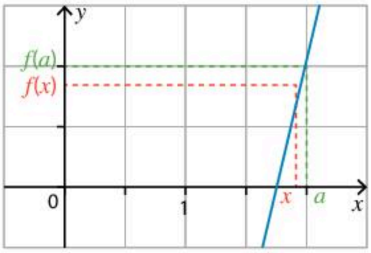
3. Limite finie

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel.
On dit que f **admet pour limite le réel ℓ lorsque x tend vers a** si les nombres $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de ℓ lorsque x est très proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

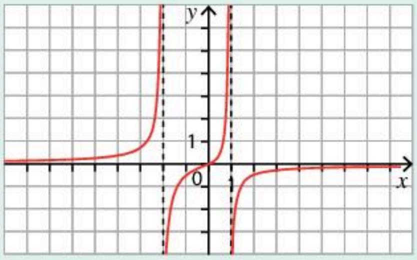
Exemple

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 3$.
On prend $a = 2$.
Lorsque x est très proche de 2, x^2 est très proche de 4,
donc $x^2 - 3$ est très proche de $4 - 3 = 1$.
On a donc $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.



Méthode 1 Conjecturer graphiquement les limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Conjecturer graphiquement les limites en $-\infty$, en $+\infty$, en -2 et en $+1$ de la fonction f représentée ci-contre et qui est définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.
2. La courbe représentative de cette fonction semble admettre des asymptotes verticales.
Donner les équations de ces asymptotes.



Solution commentée

1. L'ensemble de définition de la fonction f représentée graphiquement ci-dessus est :

$$]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[\,.$$

• On observe graphiquement que, lorsque x tend vers -2, avec $x<-2$, les valeurs de $f(x)$ augmentent de plus en plus. On peut conjecturer que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$.

• On observe graphiquement que, lorsque x tend vers -2, avec $x>-2$, les valeurs de $f(x)$ prennent des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue. On peut conjecturer que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$.

• De même, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$.

• On observe graphiquement que, lorsque x tend vers $+\infty$, les valeurs de $f(x)$ prennent des valeurs négatives aussi proches que l'on veut de 0. On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

• On observe graphiquement que, lorsque x tend vers $-\infty$, les valeurs de $f(x)$ prennent des valeurs positives aussi proches que l'on veut de 0. On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

2. On peut conjecturer que la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptotes verticales les droites d'équation $x=-2$ et $x=1$.

Méthode 2 Conjecturer une limite en utilisant la calculatrice

Soit f la fonction définie pour tout réel $x\neq3$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

• Utiliser la calculatrice pour conjecturer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 3.

Solution commentée

X	Y1
2.9	-10
2.99	-100
2.999	-1000
2.9999	-10000

X	Y1
3.1	10
3.01	100
3.001	1000
3.0001	10000

On conjecture donc $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \dfrac{1}{x-3}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{1}{x-3}=+\infty$.

Méthode 3 Déterminer une limite finie

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x+1$.

• Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 3.

Solution commentée

Lorsque x tend vers 3, la valeur de $5x$ est proche de 15, donc $5x+1$ est proche de 16.
On note $\lim\limits_{x\to3}(5x+1)=16$.

Connaître le cours

3. Opérations sur les limites

Dans ce paragraphe, f et g désignent deux fonctions, ℓ et ℓ' deux réels. Le symbole ∞ désigne soit $+\infty$ soit $-\infty$. Les propriétés ci-dessous portent sur les limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$.

1. Somme

Propriété (admise)

Si $\lim f =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim g =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim (f+g) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Remarque

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors on ne peut pas conclure sur la limite de $(f+g)$ en $+\infty$ à l'aide de cette propriété : on dit qu'on a une **forme indéterminée.**
Il est nécessaire de transformer l'écriture de $f(x) + g(x)$ pour déterminer cette limite éventuelle.

2. Produit

Propriété (admise)

Si $\lim f =$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
et $\lim g =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim (fg) =$	$\ell\ell'$	∞	∞	Forme indéterminée

Remarque

Quand le tableau indique $\lim(fg) = \infty$, il faut utiliser la règle des signes d'un produit pour conclure.

Exemple

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \times g(x)) = +\infty$.

3. Quotient

Propriété (admise)

Si $\lim f =$	ℓ	ℓ	ℓ	∞	∞	0
et $\lim g =$	$\ell' \neq 0$	0 et $g(x)$ de signe constant	∞	ℓ	∞	0
alors $\lim \left(\dfrac{f}{g}\right) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Remarque

Si $\lim g = 0$, il faut connaître le signe de $g(x)$ pour appliquer la règle des signes et conclure sur $\lim\left(\dfrac{f}{g}\right)$.

Exemple

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ avec $g(x) > 0$ à partir d'une certaine valeur de x,

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Méthode 1 Déterminer une limite en $+\infty$ et en $-\infty$

1 Étudier la limite, quand x tend vers $+\infty$, de la fonction g définie par $g(x)=-(2x-3)(4x+1)$.

2 a. Étudier la limite, quand x tend vers $-\infty$, de la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$.

b. Interpréter graphiquement le résultat.

Solution commentée

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -3=-3$, donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)=+\infty$.
De même $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x+1)=+\infty$. Par produit, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)(4x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2 a. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1=1$, donc, par somme et quotient, on conclut que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$, donc la courbe représentative de la fonction h admet la droite d'équation $y=0$ pour asymptote horizontale.

Méthode 2 Déterminer une limite en un réel a

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$ par $f(x)=5+\dfrac{1}{x+2}$.

- Déterminer la limite de f lorsque x tend vers -2, par valeurs inférieures à -2, et interpréter graphiquement.

Solution commentée

Lorsque x tend vers -2 avec $x<-2$ (limite à gauche), on a $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x=-2$, soit $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x+2=0$,

et, comme $x<-2$, on a $x+2<0$, et donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \dfrac{1}{x+2}=-\infty$. Par somme, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty$.

On peut conclure que la représentation graphique de la fonction f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x=-2$.

Méthode 3 Déterminer une limite finie

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^3-2x^2+x+8$.

- Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution commentée

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2=-\infty$, alors on ne peut pas conclure sur la limite de $(4x^3-2x^2)$ en $+\infty$ à l'aide de la règle de la somme : on dit que l'on a une **forme indéterminée**.
Dans ce cas, pour lever l'indétermination et donc pour calculer la limite, on factorise par le terme de plus haut degré, ici $4x^3$.

On obtient $f(x)=4x^3\left(1-\dfrac{2x^2}{4x^3}+\dfrac{x}{4x^3}+\dfrac{8}{4x^3}\right)$. En simplifiant, on a $f(x)=4x^3\left(1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$.

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{2x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^3}=0$ et donc, par somme, on obtient

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)=1$.

Par ailleurs, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3=+\infty$.

Par produit, on obtient finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4. Notion de continuité

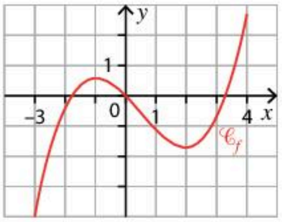
1. Notion intuitive de fonction continue sur un intervalle

Définition

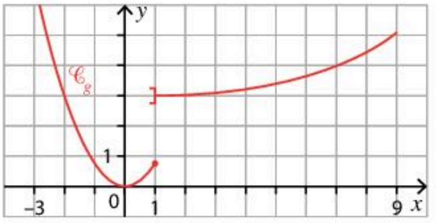
On considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est **continue** sur I si on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

Exemples

- La fonction f définie sur $[-3 ; 4]$ représentée ci-dessous **est continue** sur $[-3 ; 4]$.



- La fonction g définie sur $[-3 ; 9]$ représentée ci-dessous n'est **pas continue** sur $[-3 ; 9]$.



2. Continuité des fonctions de référence

Propriété (admise)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I.

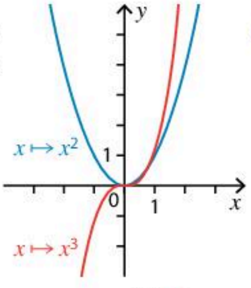
f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Propriétés (admises)

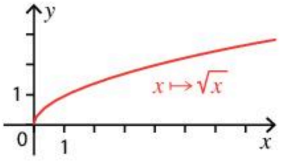
- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, les fonctions affines et polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
- La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemples

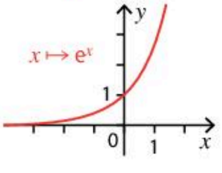
- $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$
  $x \mapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$



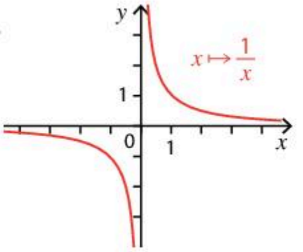
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$



- $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$



- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$

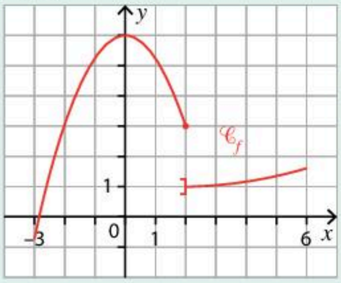


Méthode 1 Conjecturer graphiquement la continuité d'une fonction

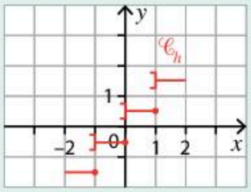
1 Conjecturer si les fonctions représentées ci-dessous sont continues sur I.

2 Pour celles qui ne sont pas continues sur I, indiquer les plus grands intervalles possibles sur lesquels elles sont continues.

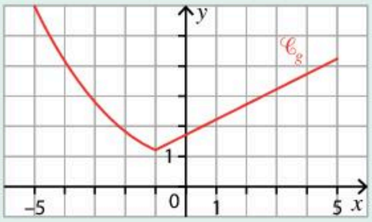
a. $I = [-3 ; 6]$



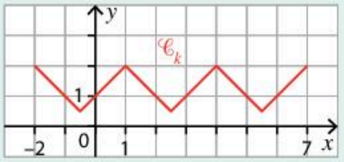
c. $I = [-2 ; 2]$



b. $I = [-5 ; 5]$



d. $I = [-2 ; 7]$



Solution commentée

1 La fonction f n'est pas continue en 2, donc elle n'est pas continue sur $I = [-3 ; 6]$.
La fonction g est continue sur $I = [-5 ; 5]$ car on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon de la feuille.
La fonction h n'est pas continue en −1, 0 et 1, donc elle n'est pas continue sur $I = [-2 ; 2]$.
La fonction k est continue sur $I = [-2 ; 7]$ car on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon de la feuille.

2 La fonction f est continue sur l'intervalle $[-3 ; 2]$ et sur l'intervalle $]2 ; 6]$.
La fonction h est continue sur les intervalles $[-2 ; -1]$, $]-1 ; 0]$, $]0 ; 1]$ et $]1 ; 2]$.

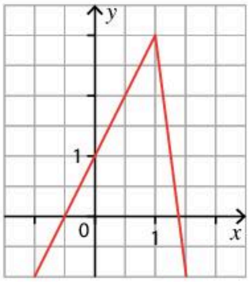
Méthode 2 Étudier la continuité d'une fonction en un réel

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ -3x^2+6 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

1 Démontrer que la fonction f est continue sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

2 La fonction f est-elle continue en 1 ?

Solution commentée



1 Sur $]-\infty ; 1[$, f est une fonction affine, donc continue.
Sur $]1 ; +\infty[$, f est une fonction polynôme, donc continue.

2 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (2x+1) = 3$

$f(1) = -3 \times 1^2 + 6 = 3.$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = f(1).$

La fonction f est continue en 1.

Connaître le cours

5. Théorème des valeurs intermédiaires

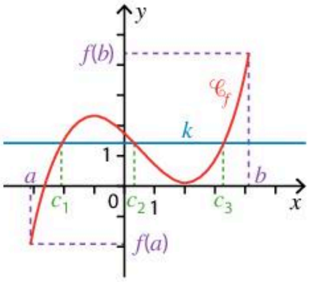
1. Cas d'un intervalle fermé

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\ ;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

Exemple

Sur la figure ci-contre, il existe trois valeurs c_1, c_2 et c_3 telles que $f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=k$.



Remarque

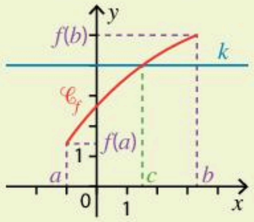
Le théorème signifie que, quand x varie de a à b, $f(x)$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

2. Cas d'une fonction strictement monotone

Théorème : cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires (admis)

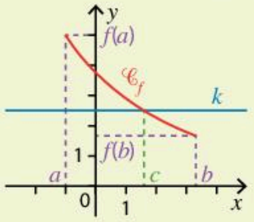
On considère une fonction f définie, continue et strictement monotone (c'est-à-dire strictement croissante ou strictement décroissante) sur un intervalle $[a\ ;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x)=k$ admet une **unique** solution sur l'intervalle $[a\ ;b]$.

- Cas où f est strictement croissante



x	a	c	b
Variation de f	$f(a)$	k	$f(b)$

- Cas où f est strictement décroissante



x	a	c	b
Variation de f	$f(a)$	k	$f(b)$

3. Extension à d'autres intervalles

Théorème (admis)

a désigne un réel ou $-\infty$ et b désigne un réel ou $+\infty$. Soit f une fonction continue sur $]a\ ;b[$.

- Pour tout réel k compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a\ ;b[$.
- Si, de plus, f est strictement monotone sur $]a\ ;b[$, alors cette solution est unique.

Remarque

La limite (finie ou infinie) d'une fonction en un point peut être placée dans un tableau de variation comme un nombre.

Méthode 1 Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f la fonction définie sur $[-1\,;3]$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.

• Montrer qu'il existe au moins un réel c appartenant à $[-1\,;3]$ tel que $f(c)=0$.

Solution commentée

f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur l'intervalle $[-1\,;3]$.
$f(-1)=-2$ et $f(3)=2$, donc 0 est compris entre $f(-1)$ et $f(3)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c appartenant à $[-1\,;3]$ tel que $f(c)=0$.

Méthode 2 Étudier une équation du type $f(x)=0$ avec f strictement monotone

Soit f la fonction définie sur $[4\,;9]$ par $f(x)=\sqrt{x}+2x-12$. On admet que f est continue sur $[4\,;9]$.

• Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4\,;9]$.

Solution commentée

f est continue sur $[4\,;9]$.

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2$, $f'(x)>0$ sur $[4\,;9]$ donc **f est strictement croissante** sur $[4\,;9]$.

$f(4)=-2$ et $f(9)=9$, donc **0 est compris entre $f(4)$ et $f(9)$.**
Donc, d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4\,;9]$.

Méthode 3 Étudier une équation du type $f(x)=k$

Soit la fonction f définie sur $[-2\,;+\infty[$ par $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et on donne le tableau de variation de f.

x	-2		-1		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	-3	$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$	$+\infty$

• Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet trois solutions dans des intervalles que l'on précisera.

Solution commentée

• Sur l'intervalle $[-2\,;-1]$ f est **continue** et **strictement croissante**.
$2\in[-3\,;8]$, donc, d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution x_1 dans l'intervalle $[-2\,;-1]$.
• Sur l'intervalle $[-1\,;2]$ f est **continue** et **strictement décroissante**.
$2\in[-19\,;8]$, donc, d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution x_2 dans l'intervalle $[-1\,;2]$.
• Sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, f est **continue** et **strictement croissante**.
$2\in[-19\,;+\infty[$, donc, d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution x_3 dans l'intervalle $[2\,;+\infty[$.
On en conclut que l'équation $f(x)=2$ admet trois solutions sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$.