MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 2

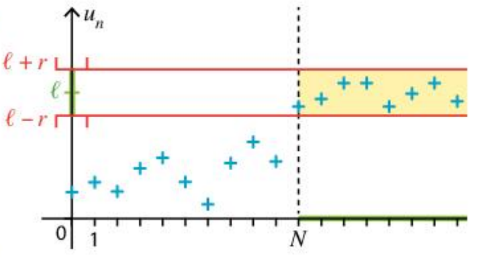
LIMITES DE SUITES

1. Définitions des limites

1. Limite finie et suites convergentes

Définitions

Soit ℓ un réel. Une suite (u_n) a pour **limite** ℓ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
On dit alors que (u_n) est **convergente** et converge vers ℓ.



Cette définition revient à dire que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque, pour tout $r > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < r$.

Remarque

$|u_n - \ell|$ représente la distance entre u_n et ℓ.

Propriété

La limite d'une suite (u_n) convergente est unique. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Propriété (admise) : limites des suites usuelles

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$, où k est un entier naturel non nul.

2. Suites divergentes

Définition

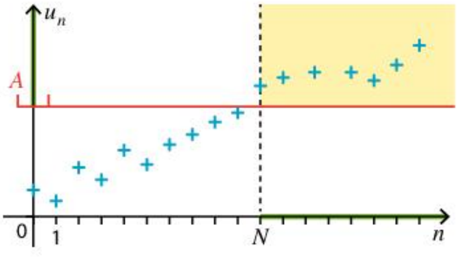
Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Définitions

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) lorsque tout intervalle de la forme $[A\ ;+\infty[$ (respectivement de la forme $]-\infty\ ; A]$) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

On dit alors que (u_n) **diverge vers** $+\infty$ (respectivement **vers** $-\infty$).



Cette définition revient à dire que :
- (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel A, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$;
- (u_n) diverge vers $-\infty$ lorsque, pour tout réel A, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant A$.

Remarque

Certaines suites divergent et n'ont pas de limite, par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$.

Propriété (admise) : limites des suites usuelles

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$, où k est un entier naturel non nul.

Méthode 1 Déterminer une limite finie en utilisant la définition

On s'intéresse à la suite (u_n), définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 5 - \frac{1}{n}$.

1 Recopier puis compléter le tableau ci-dessous.

n	1	10	100	1 000
u_n				
$\lvert u_n - 5\rvert$				

2 Conjecturer le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$, puis justifier la conjecture en utilisant la définition de la limite d'une suite.

Solution commentée

1

n	1	10	100	1 000
u_n	4	4,9	4,99	4,999
$\lvert u_n - 5\rvert$	1	0,1	0,01	0,001

2 D'après le tableau, il semblerait que la suite (u_n) converge vers 5.

Soit $r > 0$. On cherche un rang N à partir duquel $\left|5 - \frac{1}{n} - 5\right| < r$, ce qui revient à $\left|\frac{1}{n}\right| < r$, c'est-à-dire, comme $n > 0$, $\frac{1}{n} < r$ ou encore, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $n > \frac{1}{r}$.

Donc, si l'on prend un entier N supérieur à $\frac{1}{r}$, on a, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - 5| < r$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.

Méthode 2 Déterminer une limite infinie en utilisant la définition

On s'intéresse à la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2 - 3n$.

1 Recopier puis compléter le tableau ci-dessous.

n	1	10	100	1 000
v_n				

2 Déterminer le plus petit rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $v_n \leqslant -1\,000$

3 Conjecturer le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$, puis justifier la conjecture en utilisant la définition de la limite d'une suite.

Solution commentée

1

n	1	10	100	1 000
v_n	–1	–28	–298	–2 998

2 $v_n \geqslant -1\,000$ équivaut à $2 - 3n \geqslant -1\,000$, ou encore $n \geqslant \frac{1\,002}{3}$, soit $n \geqslant 334$.

Ainsi $N = 334$.

3 D'après le tableau, il semblerait que la suite (v_n) diverge vers $-\infty$.

Soit A un réel. On cherche un rang N à partir duquel $2 - 3n \leqslant A$, ce qui revient à $n \geqslant \frac{2 - A}{3}$.

Donc, si l'on prend un entier N supérieur à $\frac{2 - A}{3}$, on a, pour tout $n \geqslant N$, $v_n \leqslant A$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

2. Limites et opérations

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et soient ℓ et ℓ' deux réels. Le symbole ∞ désigne soit $+\infty$ soit $-\infty$.

1. Somme

Propriété (admise)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ldots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Remarques

- Dans le cas où le calcul mène à une forme indéterminée, il peut être utile de transformer l'écriture de $u_n + v_n$.
- La limite de $(u_n + \alpha)$, où α est un réel, est la limite de $(u_n + v_n)$ dans le cas où (v_n) est la suite constante de terme général égal à α.

2. Produit

Propriété (admise)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ldots$	$\ell \times \ell'$	∞	∞	**Forme indéterminée**

Remarques

- Quand le tableau indique $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \infty$, il faut utiliser la règle des signes pour conclure.
- La limite de (ku_n), où k est un réel non nul, est la limite de $(u_n \times v_n)$ dans le cas où (v_n) est la suite constante de terme général égal à k.

3. Quotient

Propriété (admise)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$	ℓ	$\ell' \neq 0$	∞	ℓ ou ∞	0	∞
et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ldots$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0 avec v_n de signe constant	0	∞
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \ldots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	**Forme indéterminée**	**Forme indéterminée**

Remarque : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et si (u_n) a une limite, il faut qu'à partir d'un certain rang le signe de v_n soit constamment positif ou constamment négatif pour pouvoir appliquer la règle des signes et conclure sur la limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Méthode 1 Déterminer une limite en utilisant les opérations

Déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n par :

1 $u_n = n^2 + n - 6$ **2** $v_n = (2-5n)\sqrt{n}$

Solution commentée

1 $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-6) = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-6) = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2 $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc, par produit et en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5n) = -\infty$ puis, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2-5n) = -\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (2-5n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc, par produit et en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Méthode 2 Lever une indétermination

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = n^2 - 10n + 5 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2n-4}{3+n}.$$

1 Montrer que, pour chacune de ces suites, les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure sans transformer les expressions.

2 En transformant l'écriture des termes généraux de chacune d'entre elles, calculer leurs limites.

Solution commentée

1 • $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-10n) = -\infty$ puis, par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-10n+5) = -\infty$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-10n+5) = -\infty$: on ne peut donc pas conclure.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ puis, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-4) = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+n) = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-4) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+n) = +\infty$: on ne peut donc pas conclure.

2 • Pour tout entier $n \geqslant 1$, en factorisant par n^2, on obtient $u_n = n^2\left(1 - \frac{10}{n} + \frac{5}{n^2}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{10}{n}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}$ et, par somme :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{10}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{10}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 1$, donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Pour tout entier $n \geqslant 1$, en factorisant par n au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$v_n = \frac{n\left(2 - \frac{4}{n}\right)}{n\left(\frac{3}{n} + 1\right)} = \frac{2 - \frac{4}{n}}{\frac{3}{n} + 1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{4}{n}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n}$ et, par somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{4}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{n} + 1\right) = 1$, ce qui donne, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

3. Limites et comparaison

1. Limite infinie

Théorème

Soit N un entier naturel.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple

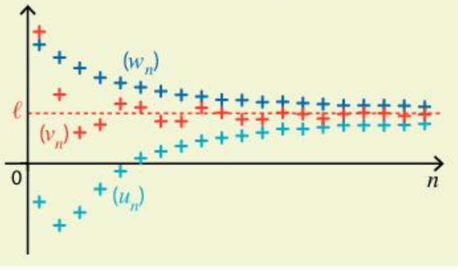
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n + \cos(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout entier naturel n, on a : $-1 \leqslant \cos(n) \Leftrightarrow n-1 \leqslant n + \cos(n) \Leftrightarrow n-1 \leqslant u_n$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$ donc, d'après le théorème précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. Limite finie

Théorème des gendarmes (admis)

Soit N un entier naturel et soit ℓ un réel.
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge aussi vers ℓ.



Remarque

Ce théorème permet simultanément de prouver que la suite (v_n) converge et de déterminer la valeur de sa limite. Il est aussi connu sous les noms de théorème d'encadrement ou théorème « sandwich ».

Propriété

Soit N un entier naturel, soient ℓ et ℓ' deux réels.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.
Si (u_n) converge vers ℓ et si (v_n) converge vers ℓ', alors $\ell \leqslant \ell'$.

Propriétés

Soient ℓ un réel et (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n.

- Si (u_n) est croissante et converge vers ℓ, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
- Si (u_n) est décroissante et converge vers ℓ, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell$.

Méthode 1 Déterminer une limite par comparaison

Déterminer la limite de chacune des suites définies ci-dessous.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n^2 + (-1)^n$.

Solution commentée

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{\dfrac{1}{n+1}} \geqslant 0$. En ajoutant n à chaque membre de l'inégalité, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + \sqrt{\dfrac{1}{n+1}} \geqslant n$, ce qui équivaut à $u_n \geqslant n$.

   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \leqslant 1$ donc, en ajoutant $-n^2$ à chaque membre de l'inégalité, on obtient $-n^2 + (-1)^n \leqslant -n^2 + 1$. Donc $u_n \leqslant -n^2 + 1$, pour tout entier naturel n.

   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2) = -\infty$ et, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2 + 1) = -\infty$.

   Donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Méthode 2 Déterminer la limite d'une suite avec le théorème des gendarmes

1. Déterminer la limite de la suite (w_n), définie pour tout entier naturel n tel que $n > 1$ par :

$$w_n = \frac{1}{n + \cos(n)}.$$

2. Étudier la convergence de la suite (z_n), définie pour tout entier naturel n par $z_n = 1 + \dfrac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$.

Solution commentée

1. Pour tout entier naturel n tel que $n > 1$, on a $1 \geqslant \cos(n) \geqslant -1$, d'où $n + 1 \geqslant n + \cos(n) \geqslant n - 1$.

   Or, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n + \cos(n)} \leqslant \dfrac{1}{n-1}$, soit $\dfrac{1}{n+1} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.

   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$. D'où, par passage à l'inverse : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n-1}$.

   D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

2. Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
   En ajoutant 2 à chaque membre de l'inégalité, on obtient $1 \leqslant 2 + (-1)^n \leqslant 3$.

   Puis en divisant par $n^2 + 1$, quantité positive, on a $\dfrac{1}{n^2+1} \leqslant \dfrac{2 + (-1)^n}{n^2+1} \leqslant \dfrac{3}{n^2+1}$, d'où :

   $1 + \dfrac{1}{n^2+1} \leqslant z_n \leqslant 1 + \dfrac{3}{n^2+1}$ pour tout entier naturel n.

   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$ donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n^2+1} = 0$.

   Enfin, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2+1}\right) = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{n^2+1}\right)$.

   D'après le théorème des gendarmes, on a donc : la suite (z_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 1$.

4. Suites géométriques, suites monoto

1. Suites du type (q^n)

Propriétés

Soit q un réel.

- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite (q^n) converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) converge vers 1.
- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

Exemples

- Soit $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $2 > 1$ donc, d'après la propriété, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

- Soit $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc, d'après la propriété, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Remarque

Ce théorème permet en particulier de conclure sur la convergence ou la divergence d'une suite géométrique et d'en calculer la limite éventuelle.

2. Suites monotones

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Soient M et m deux réels.

Théorème (admis)

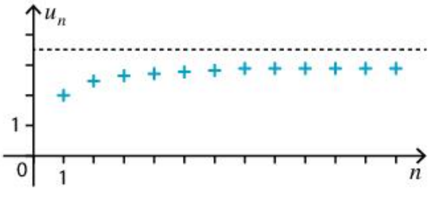
- Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

Corollaire

- Si (u_n) est croissante et majorée par M, alors (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant M$.
- Si (u_n) est décroissante et minorée par m, alors (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant m$.

Remarque

Le théorème assure de l'existence de la limite ℓ de la suite mais il ne donne pas la valeur de cette limite. Le corollaire précise que si la suite est majorée par M, alors $\ell \leqslant M$.
Par exemple, pour la suite représentée ci-contre, 3,5 est un majorant mais n'est pas la limite.



Théorème

- Si (u_n) est croissante et non majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Méthode 1 Déterminer la limite d'une suite du type (q^n)

Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n.

1. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$
2. $v_n = \dfrac{5^n}{3^n}$

Solution commentée

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Or $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{5^n}{3^n} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$. Or $\dfrac{5}{3} > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^n = +\infty$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Méthode 2 Étudier la convergence d'une suite géométrique

Étudier la convergence de chacune des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$.

1. (w_n), suite géométrique de raison $-\dfrac{5}{3}$ et de premier terme égal à 5.
2. (z_n), suite géométrique de raison e et de premier terme égal à -2.

Solution commentée

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 5 \times \left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$. Or $-\dfrac{5}{3} < -1$, donc, d'après le théorème du cours, $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$ n'admet pas de limite.
Donc la suite (w_n) diverge et n'admet pas de limite.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = -2 \times \mathrm{e}^n$. Or $\mathrm{e} > 1$, donc, d'après le théorème du cours, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$.
Et, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = -\infty$. La suite (z_n) diverge donc vers $-\infty$.

Méthode 3 Prouver la convergence d'une suite monotone

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2.
2. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
3. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?

Solution commentée

1. Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $P(n) : u_n \geqslant 2$. On raisonne par récurrence.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$, $u_0 = 4$ donc $P(0)$ est vraie.
   - **Hérédité.** On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \geqslant 2$.

   Alors $\dfrac{1}{2}u_k \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{2}u_k + 1 \geqslant 2$, soit $u_{k+1} \geqslant 2$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
   - **Conclusion.** La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

   Donc, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$. La suite (u_n) est minorée par 2.

2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}u_n + 1 - u_n = -\dfrac{1}{2}u_n + 1$.
Or $u_n \geqslant 2$, donc $-\dfrac{1}{2}u_n \leqslant -1$, donc $-\dfrac{1}{2}u_n + 1 \leqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, soit $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Donc la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est minorée et décroissante, donc elle est convergente, c'est-à-dire qu'elle admet une limite réelle que l'on note ℓ. Comme, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$, on peut conclure que $\ell \geqslant 2$.