MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 3

Connaître le cours

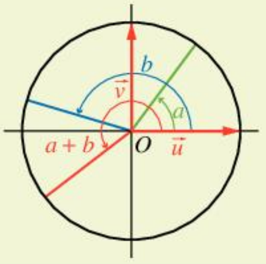
1. D'autres formules de trigonométrie

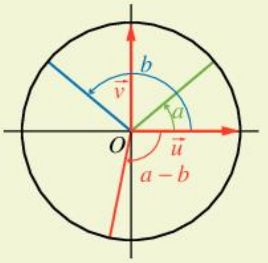
1. Formules d'addition

Propriété

Soient a et b deux réels.
$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.
$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$.
$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$.

DÉMO p. 60





Exemples

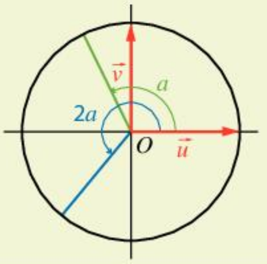
- $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.
- $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2. Formules de duplication

On déduit des formules précédentes, en prenant $b=a$, les propriétés suivantes.

Propriétés

- Soit a un réel : $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$ et $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$.
- Soit a un réel : $\cos(2a)=2\cos^2(a)-1$ et $\cos(2a)=1-2\sin^2(a)$.
- Soit a un réel : $\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$.



Démonstrations

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=\cos^2(a)-\left(1-\cos^2(a)\right)=2\cos^2(a)-1$$
$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=\left(1-\sin^2(a)\right)-\sin^2(a)=1-2\sin^2(a)$$
$$\cos(2a)=2\cos^2(a)-1\Leftrightarrow\cos(2a)+1=2\cos^2(a)\Leftrightarrow\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\cos(2a)=1-2\sin^2(a)\Leftrightarrow 2\sin^2(a)=1-\cos(2a)\Leftrightarrow\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Exemple

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Comme $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$, alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Remarque

Ces formules permettent d'obtenir des égalités liant le cosinus et le sinus d'un angle de mesure x avec ceux de l'angle moitié $\frac{x}{2}$.

Exercice résolu 1 Déterminer des valeurs exactes de cosinus et sinus

1 Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2 Déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Solution commentée

1 On remarque que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2 On remarque que $2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1-\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}{2}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Comme $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$, alors $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice résolu 2 Transformer des expressions trigonométriques – Résoudre des équations trigonométriques

1 Montrer que pour tout réel x : $\sin(x)-\cos(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

2 **a.** Exprimer $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

b. En déduire les solutions, dans $]-\pi\,;\pi]$ de $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=-1$.

3 Déterminer deux réels A et α avec $A>0$ et $0\leqslant\alpha<2\pi$ tels que : $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=A\sin(x+\alpha)$.

Solution commentée

1 $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\right)=\sin(x)-\cos(x)$.

2 **a.** $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)$.

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)$.

b. $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)\right)=-\frac{1}{2}\times(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ ou $x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ ou $x=\pi$.

3 Pour transformer les expressions du type $a\cos(x)+b\sin(x)$, où a et b sont des réels non nuls, on utilise l'une des formules d'addition après avoir factorisé l'expression par $\sqrt{a^2+b^2}$.

$$\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}}\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}}\sin(x)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)\right)$$

$$=2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc $A=2$ et $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Connaître le cours

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Notation $e^{i\theta}$

Définition

Pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Remarques

- $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
- Cas particuliers : $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

2. Relation fonctionnelle

Propriétés

DÉMO en ligne

Soient θ et θ' deux nombres réels et n un entier relatif.

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Exemples

- $e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- $\left(e^{i\frac{\pi}{14}}\right)^7 = e^{i\frac{7\pi}{14}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$

3. Forme exponentielle d'un nombre complexe

Propriété et Définition

Soient z un nombre complexe non nul, r et θ deux réels et $r > 0$.
$|z| = r$ et $\arg(z) = \theta\ [2\pi] \Leftrightarrow z = re^{i\theta}$.
L'écriture $re^{i\theta}$ est appelée **forme exponentielle** de z.

Démonstration

$|z| = r$ et $\arg(z) = \theta\ [2\pi] \Leftrightarrow z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ (d'après la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul) $\Leftrightarrow z = re^{i\theta}$ (par définition de $e^{i\theta}$).

Exemple

- $z = 2+2i$. Comme $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ alors la forme exponentielle de z est $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- Le nombre complexe $z = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas sous une forme exponentielle car $-2 < 0$.

Comme $e^{i\pi} = -1$, alors $-2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$ qui est donc une forme exponentielle du nombre z.

Exercice résolu 1 Écrire un nombre complexe sous forme exponentielle

On considère les nombres complexes : $z_1 = 4\sqrt{3} + 4\text{i}$ et $z_2 = \text{i}e^{\frac{\text{i}\pi}{3}}$.

Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

Solution commentée

Soit θ un argument de z_1.

$$|4\sqrt{3}+4\text{i}| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2} = 8 \text{ et } \left.\begin{array}{l}\cos(\theta) = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}. \text{ Donc } z_1 = 8e^{\text{i}\frac{\pi}{6}} \text{ par exemple.}$$

$$\text{i} = e^{\text{i}\frac{\pi}{2}}, \text{ donc } z_2 = e^{\text{i}\frac{\pi}{2}} \times e^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = e^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}.$$

Exercice résolu 2 Calculer avec la forme exponentielle

Simplifier les écritures suivantes.

1. $\left(2e^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}\right)\left(3e^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)$
2. $\dfrac{2e^{\text{i}\pi}}{e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}}$
3. $\left(3e^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4$
4. $\dfrac{\left(e^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2}{\left(3e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\right)^3}$

Solution commentée

1. $\left(2e^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}\right)\left(3e^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right) = 6e^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 6e^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 6e^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

2. $\dfrac{2e^{\text{i}\pi}}{e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}} = 2e^{\text{i}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$.

3. $\left(3e^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 3^4e^{-\text{i}\frac{\pi}{3}\times 4} = 81e^{-\text{i}\frac{4\pi}{3}}$.

4. $\dfrac{\left(e^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)^2}{\left(3e^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\right)^3} = \dfrac{e^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}}{27e^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}} = \dfrac{1}{27}e^{\text{i}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{27}e^{-\text{i}\frac{\pi}{12}}$.

Exercice résolu 3 Utiliser la forme exponentielle pour obtenir la forme algébrique

On donne $z = \sqrt{3} + \text{i}$.

Écrire z sous forme exponentielle, puis en déduire la forme algébrique de $\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)^{11}$.

Solution commentée

Soit θ un argument de z.

$$|\sqrt{3}+\text{i}| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 2 \text{ et } \left.\begin{array}{l}\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Donc $z = 2e^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$. D'où $z^{11} = \left(2e^{\text{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{11} = 2^{11}e^{\text{i}\frac{11\pi}{6}} = 2\,048e^{\text{i}\frac{11\pi}{6}}$.

$$2\,048e^{\text{i}\frac{11\pi}{6}} = 2\,048e^{-\text{i}\frac{\pi}{6}} = 2\,048\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\text{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\,048\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 1\,024\sqrt{3}-1\,024\text{i}.$$

3. Formules de Moivre et d'Euler

1. Formules d'Euler

Propriété

DÉMO p. 61

Pour tout réel θ :

$\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Remarque

Il est parfois utile de savoir utiliser les formules de la façon suivante :
$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos(\theta)$ et $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin(\theta)$.

Exemples

- $\cos^2(\theta)=\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2=\dfrac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2}{4}=\dfrac{\left(e^{i\theta}\right)^2+2\times e^{i\theta}\times e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2}{4}=\dfrac{e^{2i\theta}+2e^{i\times 0}+e^{-i\theta}}{4}$

$$=\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2}{4}=\frac{2\cos(2\theta)+2}{4}=\frac{\cos(2\theta)+1}{2}$$

- $\sin^2(\theta)=\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=\dfrac{\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2}{-4}=\dfrac{\left(e^{i\theta}\right)^2-2\times e^{i\theta}\times e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2}{-4}=\dfrac{e^{2i\theta}-2e^{i\times 0}+e^{-i\theta}}{-4}$

$$=\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}-2}{-4}=\frac{2\cos(2\theta)-2}{-4}=\frac{-\cos(2\theta)+1}{2}$$

On retrouve des formules de duplication.

- Pour tout θ de $[0;\pi[$, on peut déterminer la forme exponentielle de $1+e^{i\theta}$ en factorisant par $e^{i\frac{\theta}{2}}$:

$$1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Or $0\leqslant\theta<\pi$ donc $0\leqslant\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ d'où $0<\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\leqslant 1$.

Donc $2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)>0$ donc la forme exponentielle de $1+e^{i\theta}$ est $2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2. Formule de Moivre

Propriété

DÉMO p. 61

Pour tout réel θ et tout entier naturel n :
$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Remarques

- Il s'agit d'une autre façon d'exprimer l'égalité : $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$.
- La formule de Moivre permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, en s'aidant du binôme de Newton.

Exemples

D'une part : $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$.
D'autre part : $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2=\cos^2(\theta)+2i\cos(\theta)\sin(\theta)-\sin^2(\theta)$.
Donc en identifiant les parties réelles et imaginaires :
$\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$ et $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$.
On retrouve les formules de duplication.

Exercice résolu 1 Découvrir de nouvelles formules de trigonométrie à l'aide des formules d'Euler

Montrer que pour tout x et y réels on a : $\cos(x)\cos(y)=\dfrac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$.

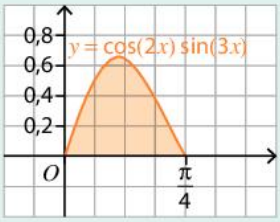
Solution commentée

En utilisant les formules d'Euler on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(x)\cos(y)&=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\times\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}=\frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{iy}+e^{-iy}\right)}{4}=\frac{e^{ix+iy}+e^{ix-iy}+e^{-ix+iy}+e^{-ix-iy}}{4}\\&=\frac{e^{i(x+y)}+e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}+e^{-i(x+y)}}{4}=\frac{\left(e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}\right)+\left(e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}\right)}{4}\\&=\frac{2\cos(x+y)+2\cos(x-y)}{4}=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))\end{aligned}$$

Exercice résolu 2 Linéariser pour calculer une intégrale

Soit f la fonction définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\cos(2x)\sin(3x)$.



1 À l'aide des formules d'Euler, transformer l'écriture de f de telle façon que celle-ci s'écrive sans puissances ni produits de cosinus et sinus.

2 En déduire une primitive de f et déterminer l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée.

Solution commentée

1 Il s'agit de « linéariser » l'expression de $f(x)$.

$\cos(2x)=\dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}$ et $\sin(3x)=\dfrac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}$.

D'où

$$\begin{aligned}\cos(2x)\sin(3x)&=\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\times\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}=\frac{\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)}{4i}=\frac{e^{2ix+3ix}-e^{2ix-3ix}+e^{-2ix+3ix}-e^{-2ix-3ix}}{4i}\\&=\frac{e^{5ix}-e^{-ix}+e^{ix}-e^{-5ix}}{4i}=\frac{\left(e^{5ix}-e^{-5ix}\right)+\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{4i}=\frac{2i\sin(5x)+2i\sin(x)}{4i}=\frac{1}{2}\sin(5x)+\frac{1}{2}\sin(x).\end{aligned}$$

2 $f(x)\geqslant 0$ pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ donc l'aire hachurée est : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx$.

D'après la question 1, on en déduit : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin(5x)+\frac{1}{2}\sin(x)\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin(5x)+\sin(x))\,dx$.

Une primitive de $x\mapsto\sin(5x)$ est $x\mapsto-\dfrac{1}{5}\cos(5x)$ et une primitive de $x\mapsto\sin(x)$ est $x\mapsto-\cos(x)$.

$$\begin{aligned}\text{Donc }\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx&=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos(5x)-\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{5}\cos(0)+\cos(0)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{5}+1\right)=\frac{3-\sqrt{2}}{5}.\end{aligned}$$