MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 3

Fonction logarithme népérien

1. Fonction réciproque

1. Définition d'une fonction réciproque

Définition

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J.
On suppose que f est strictement monotone sur I.
Pour tout réel y appartenant à J, d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans I.

- La fonction définie sur J : $y \mapsto x$ s'appelle la **fonction réciproque** de la fonction f.
- On la note f^{-1}.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2$.
f est continue et strictement monotone sur $[0 ; +\infty[$ et à valeurs dans $[0 ; +\infty[$ car $f(x) = x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x.
Pour tout $y \geqslant 0$, l'équation $x^2 = y$ admet une solution unique : $x = \sqrt{y}$.
La fonction définie sur $[0 ; +\infty[$: $y \mapsto x = \sqrt{y}$ est la fonction réciproque de la fonction carrée. C'est la fonction racine carrée.

Propriété (admise)

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J, de fonction réciproque f^{-1}.

Pour tout réel x appartenant à J, on a $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ et, pour tout réel x appartenant à I, $f^{-1}(f(x)) = x$.

2. Représentation graphique de f^{-1}

Propriété (admise)

On considère une fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J, de fonction réciproque f^{-1}.
On a :

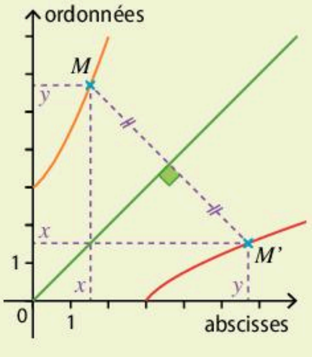
$$y = f(x) \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ et } y \in J.$$

Propriété

On considère une fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J, de fonction réciproque f^{-1}.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ celle de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

$$y = f(x) \text{ et } M(x ; y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ et } M'(y ; x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}$$



Méthode 1 Montrer qu'une fonction admet une fonction réciproque

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.

1 Démontrer que f admet une fonction réciproque et déterminer f^{-1}.

2 **a.** Calculer $f(0)$ et $f(3)$. **b.** En déduire sans calcul $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(7)$.

c. En utilisant l'expression trouvée pour $f^{-1}(x)$, retrouver les résultats de la question **2 b**.

Solution commentée

1 f est une fonction affine, donc continue sur $\mathbb{R}$.
$f(x)$ est de la forme $f(x) = mx + p$, avec $m = 2$, donc m est positif.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• D'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, pour tout réel y, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction f admet une fonction réciproque qui, à tout y réel, associe x.

• On résout l'équation $y = f(x)$ pour déterminer x en fonction de y :

$$y = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}.$$

La fonction f^{-1} est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $y \mapsto x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout réel y, $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.

On peut revenir à l'écriture traditionnelle de l'expression d'une fonction de la variable x :

$$f^{-1} \text{ est définie pour tout réel } x \text{ par } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

2 **a.** $f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$ et $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$.

b. Comme f^{-1} est la fonction réciproque de f, on a, par définition, $f^{-1}(1) = 0$ et $f^{-1}(7) = 3$.

c. On vérifie par le calcul : $f^{-1}(1) = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} = 0$ et $f^{-1}(7) = \frac{1}{2} \times 7 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Méthode 2 Tracer la courbe représentative d'une fonction réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

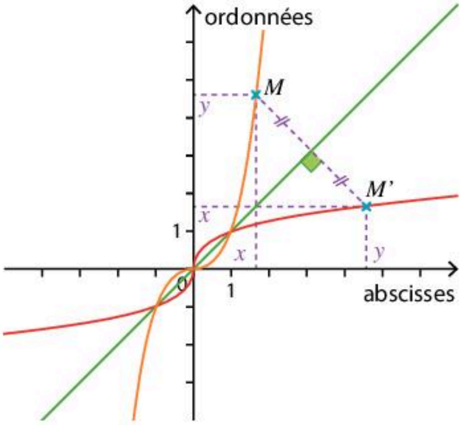
1 Démontrer que f admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}$.

2 Tracer la courbe représentative de la fonction réciproque de f dans un repère orthonormé.

Solution commentée

1 La fonction f est la fonction cube. C'est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La fonction f admet donc une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

2 Pour tracer la courbe représentative de la fonction f^{-1}, on trace la courbe représentative de la fonction f puis sa courbe symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Connaître le cours

2. Fonction logarithme népérien

1. Définition

Théorème et définitions

La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0\ ;+\infty[$.

DÉMO en ligne

- Pour tout réel $y>0$, l'équation $\mathbf{e}^x = y$ admet une unique solution x appartenant à $\mathbb{R}$.

Cette solution est appelée le **logarithme népérien de** y et se note $x = \ln(y)$.

- La fonction exponentielle admet donc une fonction réciproque définie sur $]0\ ;+\infty[$.

Cette fonction s'appelle la **fonction logarithme népérien et se note ln.**

On a :

$$\begin{aligned} \ln :]0\ ;+\infty[&\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

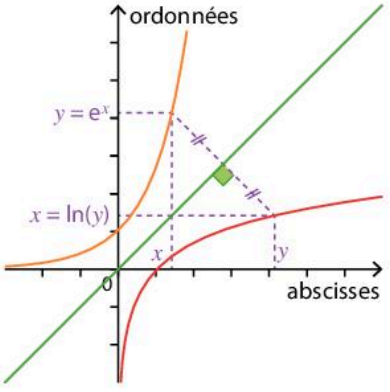
Propriété

DÉMO en ligne

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$

2. Courbe représentative

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



3. Propriétés

Propriétés algébriques (admises)

- Pour tout réel $y > 0$ et tout réel x, $\mathrm{e}^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout réel x, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.

Propriétés fonctionnelles (admises)

Pour tous réel a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- Pour tout entier naturel n, $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Méthode 1 Résoudre une équation $e^x = a$

Résoudre les équations suivantes d'inconnue un réel x.

1. $e^x = 2$
2. $e^x = 9$
3. $e^x = 0,5$

Solution commentée

1. $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$
2. $e^x = 9 \Leftrightarrow x = \ln(9)$
3. $e^x = 0,5 \Leftrightarrow x = \ln(0,5)$

Méthode 2 Résoudre une équation $\ln(x) = a$

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x > 0$.

1. $\ln(x) = 5$
2. $\ln(x) = 0$
3. $\ln(x) = -3,5$

Solution commentée

1. $\ln(x) = 5 \Leftrightarrow x = e^5$
2. $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
3. $\ln(x) = -3,5 \Leftrightarrow x = e^{-3,5}$

Méthode 3 Déterminer l'ensemble de définition d'une équation et la résoudre

Résoudre l'équation (E) $\quad \ln(8x-4) = 3$.

Solution commentée

L'équation (E) a des solutions si et seulement si $8x-4 > 0$. On détermine le signe de $8x-4$.

$$8x-4 > 0 \Leftrightarrow 8x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{8} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

On résout donc l'équation (E) dans $\left]\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$: $\ln(8x-4) = 3 \Leftrightarrow 8x-4 = e^3 \Leftrightarrow 8x = 4+e^3 \Leftrightarrow x = \frac{4+e^3}{8}$.

Comme $\frac{4+e^3}{8}$ appartient à $\left]\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$, on a $\mathcal{S} = \left\{\frac{4+e^3}{8}\right\}$.

Méthode 4 Transformer une expression avec des logarithmes

Démontrer que $\ln(27) - 4\ln(3) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

Solution commentée

$$\ln(27) - 4\ln(3) = \ln\left(3^3\right) - 4\ln(3) = 3\ln(3) - 4\ln(3) = -\ln(3) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

Méthode 5 Utiliser les relations fonctionnelles

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -x + \ln\left(1+e^x\right)$.

- Démontrer que $f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right)$.

Solution commentée

$$\ln\left(1+e^{-x}\right) = \ln\left(e^{-x}\left(e^x+1\right)\right) = \ln\left(e^{-x}\right) + \ln\left(e^x+1\right) = -x + \ln\left(e^x+1\right) = f(x)$$

3. Étude de la fonction logarithme

1. Sens de variation

Propriété (admise)

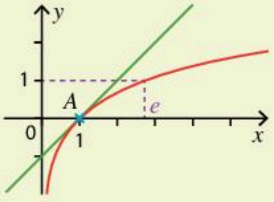
La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

Propriété

DÉMO en ligne

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de ln	$-\infty \nearrow +\infty$



Remarque

La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de la fonction ln au point A d'abscisse 1 a pour équation $y=x-1$.

Propriété (admise)

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(a)\leqslant 0 \Leftrightarrow 0<a\leqslant 1$
- $\ln(a)\geqslant 0 \Leftrightarrow a\geqslant 1$
- $\ln(a)=\ln(b) \Leftrightarrow a=b$
- $\ln(a)\leqslant \ln(b) \Leftrightarrow a\leqslant b$

2. Limites

Propriété (admise)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0} (x\ln(x))=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0$

3. Formule de dérivation

Propriété (admise)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout réel x appartenant à I, $u(x)>0$.
La fonction $\ln(u)$ qui, à tout réel x appartenant à I associe le réel $\ln(u(x))$, est dérivable sur I et :

$$(\ln(u))'=\frac{u'}{u}.$$

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(x^4+2\right)$.
$f(x)$ est de la forme $f(x)=\ln(u(x))$, avec $u(x)=x^4+2$.
Pour tout réel x, $u(x)>0$ et $u'(x)=4x^3$.

On a alors $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{4x^3}{x^4+2}$.

Méthode 1 Résoudre une inéquation

Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle donné.

1 $\ln(3x-2) \leqslant 0$ sur $\left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

2 $\ln(x+4) > 2$ sur $]-4\,;+\infty[$.

Solution commentée

1 $\ln(3x-2) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(3x-2) \leqslant \ln(1) \Leftrightarrow 3x-2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 3x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant 1$. On a $\mathcal{S} = \left]\frac{2}{3}\,;1\right]$.

2 $\ln(x+4) > 2 \Leftrightarrow \ln(x+4) > \ln\left(e^2\right) \Leftrightarrow x+4 > e^2 \Leftrightarrow x > e^2-4$. On a $\mathcal{S} = \left]e^2-4\,;+\infty\right[$.

Méthode 2 Déterminer une limite

Déterminer la limite des expressions suivantes en a donné (a peut être un réel ou l'infini).

1 $f(x) = -3\ln(x)+x-4$ $\quad a=+\infty$

2 $g(x) = 2x\ln(x)+x-3$ $\quad a=0$

3 $h(x) = \ln^2(x)-2\ln(x)+1$ $\quad a=+\infty$

4 $m(x) = x^2\ln(x)+x$ $\quad a=0$

5 $p(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ $\quad a=0$

Solution commentée

1 $-3\ln(x)+x-4 = x\left(-3\dfrac{\ln(x)}{x}+1-\dfrac{4}{x}\right)$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3\dfrac{\ln(x)}{x}+1+\dfrac{4}{x}\right)=1$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$. On en déduit par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2 $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x)=0$, donc, par somme, $\lim\limits_{x\to0}(2x\ln(x)+x-3)=-3$. On en déduit $\lim\limits_{x\to0} g(x)=-3$.

3 $h(x)=\ln(x)\left(\ln(x)-2+\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(x)}=0$.

Par somme, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-2+\dfrac{1}{\ln(x)}\right)=+\infty$. On en déduit, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

4 On a $x^2\ln(x)=x\times x\ln(x)$. On a $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x)=0$, donc, par produit, $\lim\limits_{x\to0} x^2\ln(x)=0$, donc, par somme, $\lim\limits_{x\to0} m(x)=0$.

5 $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{\ln(1+x)}{x}\times\dfrac{1}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, donc, par produit $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)=+\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$, donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)=-\infty$.

Méthode 3 Déterminer une dérivée composée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$.

- Déterminer $f'(x)$.

Solution commentée

$f(x)$ est de la forme $f(x)=\ln(u(x))$, avec $u(x)=x^2+1$. Pour tout réel x, $u(x)>0$ et $u'(x)=2x$.

On a alors $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{2x}{x^2+1}$.