MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 3

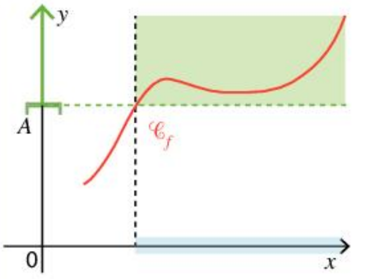
LIMITES DE FONCTIONS

1. Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

1. Limite infinie

Définitions

- Une fonction f **a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- Une fonction f **a pour limite $-\infty$ en $+\infty$** si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
- On définit de façon analogue les limites infinies en $-\infty$.



Propriétés

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On a :

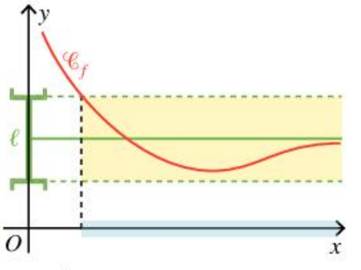
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}-\infty \text{ si } n \text{ est impair}\\ +\infty \text{ si } n \text{ est pair}\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$

2. Limite finie

Définition

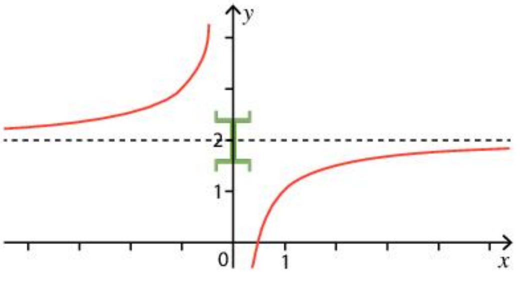
Soit ℓ un réel.

- Une fonction f **a pour limite ℓ en $+\infty$** lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
- On définit de façon analogue la limite finie de f en $-\infty$.



Exemple

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$. Soit I n'importe quel intervalle ouvert contenant 2. Pour x suffisamment grand, $\dfrac{1}{x}$ sera suffisamment petit pour que toutes les valeurs de $f(x)$ appartiennent à I. La fonction f a donc pour limite 2 en $+\infty$. De même, f a pour limite 2 en $-\infty$.



Définition

- Lorsqu'une fonction f a pour limite un réel ℓ en $+\infty$, on dit que sa courbe représentative admet pour **asymptote horizontale** en $+\infty$ la droite d'équation $y=\ell$.
- On définit de façon analogue une asymptote horizontale en $-\infty$.

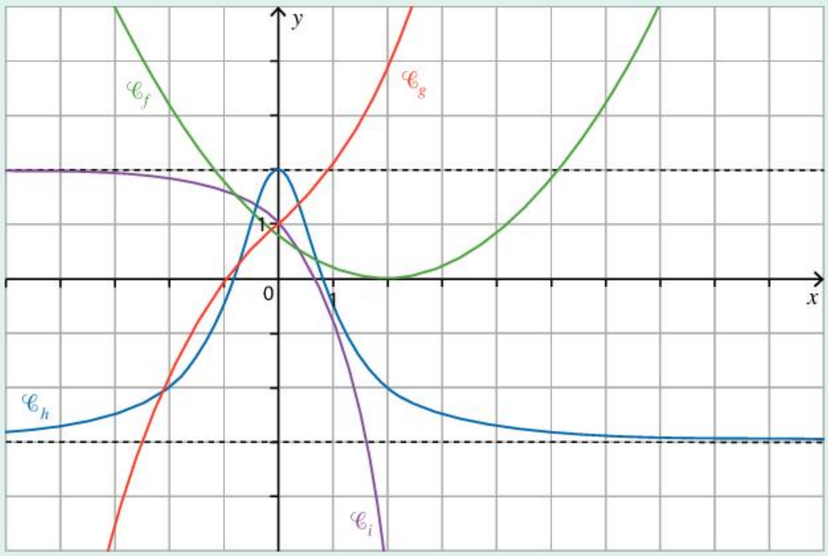
Propriétés

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0$

Méthode 1 Conjecturer graphiquement une limite en $+\infty$ et en $-\infty$

1 Conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions représentées ci-dessous.



2 Certaines courbes représentatives semblent-elles admettre des asymptotes horizontales ? Si oui, donner leurs équations.

Solution commentée

1 On peut conjecturer que :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -3$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = -\infty$.

2 D'après la question précédente, on peut conjecturer que :
- la courbe $\mathscr{C}_h$ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = -3$ en $+\infty$ et en $-\infty$;
- la courbe $\mathscr{C}_i$ admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 2$ en $-\infty$.

Méthode 2 Inscrire les limites dans un tableau de variation

Par lecture graphique, dresser le tableau de variation des fonctions définies dans la méthode 1 en y portant les limites conjecturées.

Solution commentée

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$	-3	↗	2	↘	-3

x	$-\infty$		$+\infty$
$i(x)$	2	↘	$-\infty$

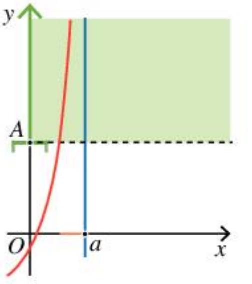
2. Limite en un réel a

1. Limite en un réel a

Définition

Soit a un réel.

- Une fonction f **a pour limite $+\infty$ en a** si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- Une fonction f **a pour limite $-\infty$ en a** si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- Soit ℓ un réel. Une fonction f **a pour limite ℓ en a** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

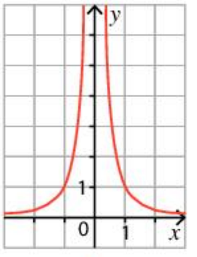


Exemple

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

Quel que soit l'intervalle I de la forme $I =]A\,;+\infty[$, si x est suffisamment proche de 0, $\dfrac{1}{x^2}$ sera supérieur à A et toutes les valeurs de $f(x)$ seront dans I.

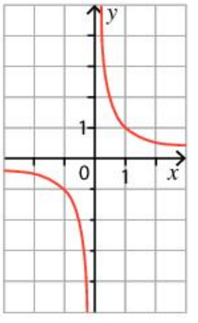
Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.



Remarque

Une fonction peut avoir une **limite « à droite »** et une **limite « à gauche »** qui sont différentes.

Dans l'exemple ci-contre, on note $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$.



2. Interprétation graphique

Définition

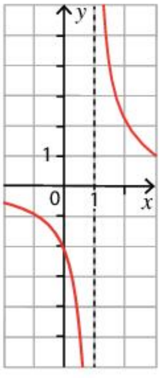
Soit a un réel. Lorsqu'une fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (à gauche ou à droite), on dit que sa courbe représentative admet la droite d'équation $x = a$ comme **asymptote verticale**.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$.

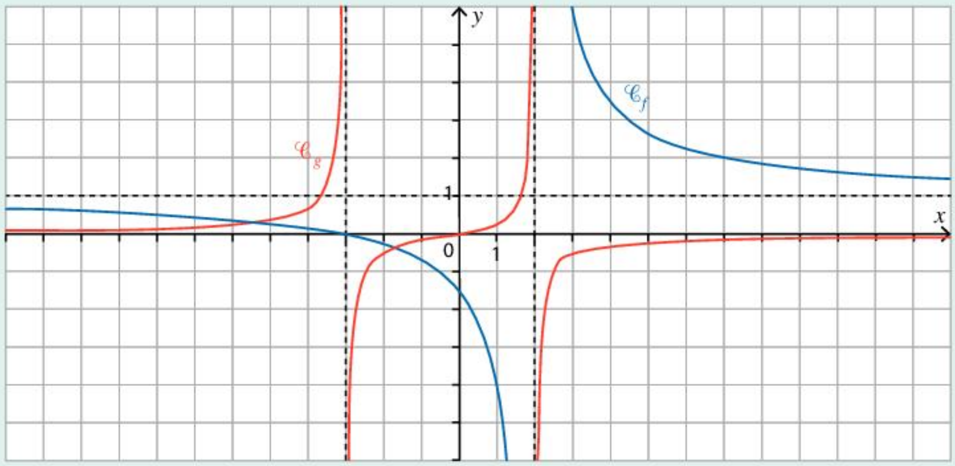
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.



Méthode 1 Conjecturer les limites d'une fonction en un réel

1 Conjecturer graphiquement les limites aux bornes de leur ensemble de définition des deux fonctions f et g représentées ci-dessous.



Par lecture graphique, dresser le tableau de variation des fonctions f et g en y portant les limites conjecturées.

Solution commentée

1 • La fonction f est définie sur $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

On peut conjecturer que :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

• La fonction g est définie sur $]-\infty\,;-3[\,\cup\,]-3\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

On peut conjecturer que :

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Méthode 2 Conjecturer les asymptotes à la courbe représentative d'une fonction

Certaines des courbes représentées dans la méthode 1 semblent-elles admettre des asymptotes horizontales ou verticales ? Si oui, donner leurs équations.

Solution commentée

• La courbe $\mathscr{C}_f$ semble admettre pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 2$ et pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 1$.

• La courbe $\mathscr{C}_g$ semble admettre pour asymptotes verticales les droites d'équations $x = -3$ et $x = 2$ et pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$.

3. Limites et opérations

Dans toute cette page, f et g désignent deux fonctions, ℓ et ℓ' deux réels. Le symbole ∞ désigne soit $+\infty$ soit $-\infty$. Les propriétés ci-dessous portent sur les limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$.

1. Somme, produit et quotient

Propriété (admise) : limite de la somme de deux fonctions

Si lim $f = \ldots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et lim $g = \ldots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors lim $(f+g) = \ldots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Propriété (admise) : limite du produit de deux fonctions

Si lim $f = \ldots$	ℓ	ℓ	∞	0
et lim $g = \ldots$	ℓ'	∞	∞	∞
alors lim $(f \times g) = \ldots$	$\ell\ell'$	∞	∞	Forme indéterminée

Propriété (admise) : limite du quotient de deux fonctions

Si lim $f = \ldots$	ℓ	ℓ	ℓ	∞	∞	0
et lim $g = \ldots$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ	∞	0
alors lim $\left(\frac{f}{g}\right) = \ldots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Remarques

- Quand le tableau indique « forme indéterminée », on ne peut pas conclure grâce aux propriétés.
Il peut être nécessaire de transformer l'écriture de la fonction pour trouver sa limite éventuelle.
- Quand le tableau indique ∞, il faut utiliser la règle des signes pour conclure.

2. Composition

a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Propriété (admise)

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{X \to b} g(X) = c \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Remarque

Le nombre $g(f(x))$ est l'image par g du nombre $X = f(x)$, lui-même image de x par f.

Propriétés (admises)

- Soient f une fonction et (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.
- Soient f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes appartiennent à I. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = b$.

Méthode 1 Déterminer une limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Étudier les limites des fonctions définies par les expressions suivantes quand x tend vers a.

1. $f(x)=x^2+2x-2\,;a=+\infty$.
2. $g(x)=(\sqrt{x}+1)(7-2x)\,;a=+\infty$.
3. $h(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\,;a=-\infty$.

Solution commentée

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)=+\infty$. Donc, par **somme**, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(7-2x)=-\infty$. Donc, par **produit**, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ (on utilise la règle des signes).

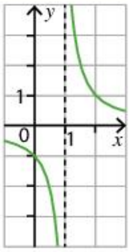
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty$. Donc, par **passage à l'inverse**, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2-1}=0$.

Méthode 2 Déterminer une limite en un réel a

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

- Déterminer la limite de f quand x tend vers 1.

Solution commentée



$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ donc, par passage à l'inverse, quand x tend vers 1, $f(x)$ tend vers une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$). Pour conclure, il faut utiliser la règle des signes et donc connaître le signe de $f(x)$.

- 1er cas : quand x tend vers 1 et $x>1$ (**limite à droite**).
  $x>1$, donc $x-1>0$, soit $f(x)>0$; donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$.
- 2e cas : quand x tend vers 1 et $x<1$ (**limite à gauche**).
  $x<1$ donc $x-1<0$, soit $f(x)<0$; donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$.

Méthode 3 Lever une forme indéterminée

Déterminer les limites des fonctions définies par les expressions suivantes quand x tend vers $+\infty$.

1. $f(x)=x^2-x$
2. $g(x)=\dfrac{2x-7}{1-x^2}$.

Solution commentée

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ donc, par somme, on rencontre une forme indéterminée.
Dans le cas d'une fonction polynôme, on factorise par la puissance de x de plus haut degré.
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$. Quand x tend vers $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ et $1-\dfrac{1}{x}$ tend vers 1.
Par produit, on a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x^2\right)=-\infty$ donc, par quotient, on rencontre une forme indéterminée.
Dans le cas d'une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes), on factorise par la puissance de x de plus haut degré.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-7}{1-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{7}{x}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{7}{x}}{x\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}.$$
Quand x tend vers $+\infty$, le numérateur a pour limite 2 et le dénominateur tend vers $-\infty$, par produit.
Ainsi, le quotient a pour limite 0, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

4. Limites et comparaison

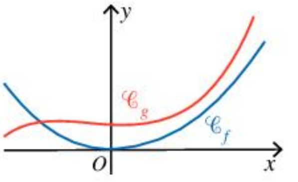
1. Limite infinie

Théorème

Soient deux fonctions f et g telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle du type $[A\,;+\infty[$, où A est un réel.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Par analogie, on peut écrire le même théorème lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $[-1\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{2\sqrt{x+1}}{2x^2+1}$.

Pour tout $x \in [-1\,;+\infty[$, $\dfrac{2\sqrt{x+1}}{2x^2+1} \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant x^2$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$. On peut donc en conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

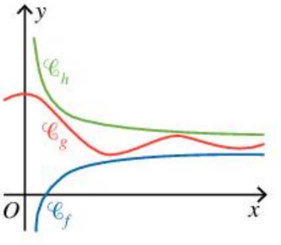
2. Limite finie

Théorème des gendarmes (admis)

Soient ℓ un réel et trois fonctions f, g et h telles que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ sur un intervalle du type $[A\,;+\infty[$, où A est un réel.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Par analogie, on peut écrire le même théorème lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a.

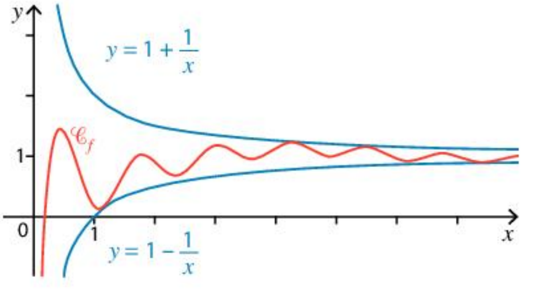


Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre et telle que, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.



3. Croissances comparées

Théorème des croissances comparées

Pour tout entier naturel n, on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Remarque

Ce théorème illustre le fait que la fonction exponentielle croît en $+\infty$ bien plus vite que toute fonction puissance.

Méthode 1 Déterminer une limite infinie par comparaison

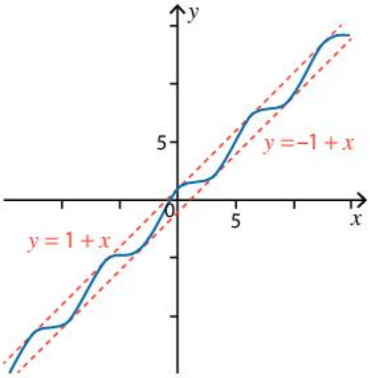
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos(x)$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f et conjecturer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. À l'aide d'un encadrement de $\cos(x)$, déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Solution commentée

1. La courbe est tracée ci-contre. Graphiquement, on peut conjecturer que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$



2. Pour tout réel x, on sait que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
Donc $-1 + x \leqslant x + \cos(x) \leqslant 1 + x$.

• Limite en $-\infty$: on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + x) = -\infty$ et $f(x) \leqslant 1 + x$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

• Limite en $+\infty$: on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1 + x) = +\infty$ et $f(x) \geqslant -1 + x$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

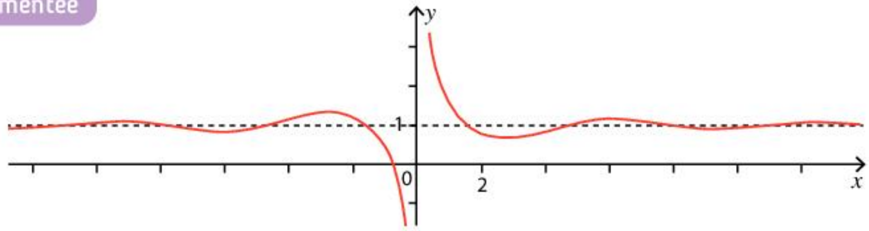
Méthode 2 Utiliser le théorème des gendarmes

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x} + 1$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f et conjecturer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. En utilisant un encadrement de $\cos(x)$, donner un encadrement de $f(x)$ et en déduire les limites conjecturées.

Solution commentée

1.



On conjecture que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

2. On sait que, pour tout x réel, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

• **1^er cas :** $x > 0$ (pour la limite en $+\infty$).
On peut alors multiplier chaque membre de cette double inégalité par $\dfrac{1}{x}$: $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Donc $-\dfrac{1}{x} + 1 \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} + 1 \leqslant \dfrac{1}{x} + 1$,

donc $-\dfrac{1}{x} + 1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x} + 1$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x} + 1\right) = 1$.

Donc, en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

• **2^e cas :** $x < 0$ (pour la limite en $-\infty$).
On peut alors multiplier chaque membre de cette double inégalité par $\dfrac{1}{x}$, mais les inégalités changent de sens : $-\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \geqslant \dfrac{1}{x}$.

Donc $-\dfrac{1}{x} + 1 \geqslant \dfrac{\cos(x)}{x} + 1 \geqslant \dfrac{1}{x} + 1$,

donc $-\dfrac{1}{x} + 1 \geqslant f(x) \geqslant \dfrac{1}{x} + 1$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x} + 1\right) = 1$.

Donc, en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.