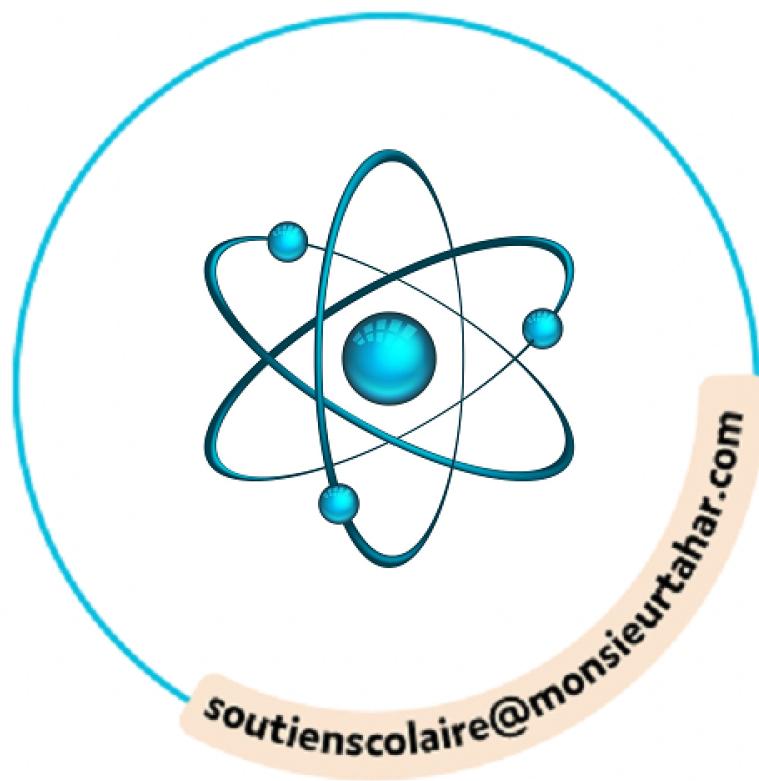
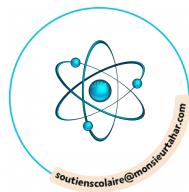


MATHEMATIQUES



CHAPITRE 4



1. Équations du second degré à coefficients réels

1. Équation du type $z^2 = a$

Propriété

DEMO
en ligne

Soit a un réel non nul.

L'équation $z^2 = a$ admet toujours deux solutions dans \mathbb{C} :

- si $a = 0$, la solution est 0.
- si $a > 0$, les solutions sont les réels \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.
- si $a < 0$, les solutions sont les imaginaires purs $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

2. Équations du type $az^2 + bz + c = 0$

Propriété

Soient a , b et c trois réels avec $a \neq 0$.

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution réelle, dite racine double : $z = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Remarque

Lorsque le discriminant est négatif, il suffit de déterminer l'une des solutions. L'autre s'obtient en prenant le conjugué de la première.

Exemple

Le discriminant de l'équation (E) $z^2 + z + 1 = 0$ est $\Delta = -3$.

Les solutions de (E) sont les complexes conjugués : $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

3. Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété

Soient a , b et c trois réels avec $a \neq 0$.

On considère le polynôme P tel que, pour tout z de \mathbb{C} , on ait $P(z) = az^2 + bz + c = 0$.

On note z_1 et z_2 les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$, avec éventuellement $z_1 = z_2$.

Alors pour tout z de \mathbb{C} , on a $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exemple

On définit le polynôme P par $P(z) = z^2 - 2z + 5$.

Le discriminant de l'équation $P(z) = 0$ est $\Delta = -16$.

Les solutions de cette équation sont les complexes conjugués : $z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + 2i$.

Par conséquent, on peut factoriser $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - (1 - 2i))(z - (1 + 2i))$.



Exercice résolu 1 Résoudre une équation de degré 2 dans \mathbb{C}

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

1 $2z^2 + 3z - 5 = 0$

2 $z^2 - 3z + \frac{9}{4} = 0$

3 $z^2 - 4z + 8 = 0$

▼ Solution commentée

1 $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49.$

$\Delta > 0$, donc l'équation possède deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-3 - 7}{4} = -\frac{5}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-3 + 7}{4} = 1.$$

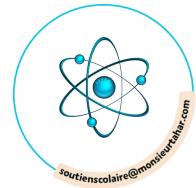
2 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times \frac{9}{4} = 9 - 9 = 0.$

$\Delta = 0$, donc l'équation possède une solution double : $z_0 = \frac{-3}{2 \times 1} = -\frac{3}{2}.$

3 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 16 - 32 = -16.$

$\Delta < 0$, donc l'équation possède deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4 - i\sqrt{(-16)}}{2 \times 1} = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \overline{2 - 2i} = 2 + 2i.$$



Exercice résolu 2 Résoudre une équation se ramenant à une équation du second degré

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

1 $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$

2 $\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} + 13 = 0$

▼ Solution commentée

1 Il s'agit d'une équation bicarrée, on pose $Z = z^2$ et l'équation devient : $Z^2 + 2Z - 8 = 0.$

1^{re} étape : Résolution en Z

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36.$$

$\Delta > 0$, donc l'équation possède deux racines réelles :

$$Z_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{-2 - 6}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \text{ et } Z_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

2^e étape : Résolution en z

$$z^2 = Z_1 = -4, \text{ donc } z = 2i \text{ ou } z = -2i.$$

$$z^2 = Z_2 = 2, \text{ donc } z = \sqrt{2} \text{ ou } z = -\sqrt{2}.$$

Donc l'équation $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$ possède quatre racines : $2i, -2i, \sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

2 Pour tout $z \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} + 13 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 4z + 13z^2}{z^2} = 0 \Leftrightarrow 13z^2 - 4z + 1 = 0.$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 \times 1 = 16 - 52 = -36.$$

$\Delta < 0$, donc l'équation possède deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4 - i\sqrt{(-36)}}{2 \times 13} = \frac{4 - 6i}{26} = \frac{2 - 3i}{13} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \overline{\left(\frac{2 - 3i}{13}\right)} = \frac{2 + 3i}{13}.$$

Les solutions de $13z^2 - 4z + 1 = 0$ sont $\frac{2 - 3i}{13}$ et $\frac{2 + 3i}{13}$, qui sont non nulles, donc ce sont aussi les solutions de $\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} + 13 = 0.$

2. Factorisation des polynômes

1. Fonction polynôme

Définitions

- Soient n un entier naturel et a_0, a_1, \dots, a_n des réels (éventuellement des complexes) avec $a_n \neq 0$. Une **fonction polynôme**, ou **polynôme**, P est une fonction définie sur \mathbb{C} qui admet une unique écriture polynomiale, à savoir, pour tout nombre complexe z , $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$.
- Le **polynôme nul** est le polynôme P tel que pour tout complexe z : $P(z) = 0$.
- Si P n'est pas le polynôme nul, n est le **degré** de P .
- On appelle **racine** d'un polynôme tout complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

Exemple

- $P(z) = 3$ est un polynôme constant, son degré est 0.
- $P(z) = 3z^3$ est un **monôme** de degré 3.

Propriété (admise)

Un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

2. Factorisation par $z - a$

Définition

On dit qu'un polynôme P est **factorisable** (ou divisible) par $z - a$ s'il existe un polynôme Q tel que : $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Exemple

$P(z) = z^2 - 4$ est factorisable par $z - 2$ puisque $P(z) = (z - 2)(z + 2)$.

Propriété

Soit a un nombre complexe.

Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n , $z^n - a^n$ est factorisable par $z - a$.

On a : $z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}) = (z - a) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k} \right)$.

Propriété

Le polynôme P est factorisable par $z - a$ si et seulement si a est une racine de P .

3. Degré et racines

Propriété

Un polynôme non nul P , de degré n , admet au plus n racines distinctes.

Remarque

Si un polynôme de degré n s'annule pour au moins $n + 1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.



Exercice résolu 1 Factoriser un polynôme dont une racine est connue

On définit le polynôme P pour tout complexe z par : $P(z) = z^4 - 4z^2 - z + 2$.

1 Vérifier que 2 est une racine de P .

2 En déduire une factorisation de P .

▼ Solution commentée

1 $P(2) = 2^4 - 4 \times 2^2 - 2 + 2 = 16 - 16 - 2 + 2 = 0$, donc 2 est bien une racine de P .

2 Comme $P(2) = 0$, on sait que P est factorisable par $(z - 2)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q tel que, pour tout complexe z , $P(z) = (z - 2)Q(z)$. Comme P est de degré 4 et $z - 2$ est de degré 1, alors Q est de degré $4 - 1 = 3$. Donc $Q(z)$ est de la forme $az^3 + bz^2 + cz + d$ où a, b, c et d sont des réels à déterminer.

MÉTHODE 1 : La méthode des coefficients indéterminés.

Ainsi $P(z) = (z - 2)(az^3 + bz^2 + cz + d)$.

$$P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz - 2az^3 - 2bz^2 - 2cz - 2d = az^4 + (b - 2a)z^3 + (c - 2b)z^2 + (d - 2c)z - 2d.$$

On peut facilement identifier a et d : $a = 1$ et $-2d = 2 \Leftrightarrow d = -1$.

En identifiant les coefficients des termes de degré 2 et 3, on est ramené à résoudre le système : $\begin{cases} b - 2 = 0 \\ c - 2b = -4 \\ -1 - 2c = -1 \end{cases}$ dont les solutions sont : $b = 2$ et $c = 0$. Donc $P(z) = (z - 2)(z^3 + 2z^2 - 1)$

MÉTHODE 2 : La méthode de la division

On considère le terme de plus haut degré de Q , ainsi $Q(z) = z^3 + R(z)$ (où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2).

On obtient : $P(z) = (z - 2)(z^3 + R(z))$

En développant, on obtient :

$$z^4 - 4z^2 - z + 2 - (z - 2)z^3 = (z - 2)R(z)$$

$$\text{soit } 2z^3 - 4z^2 - z + 2 = (z - 2)R(z)$$

Et on réitère le procédé avec R :

$R(z) = 2z_2 + S(z)$ (où S est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1).

$$\begin{aligned} (z - 2)(z^3 + 2z^2 - 1) &= z^4 + 2z^3 - z - 2z^3 - 4z^2 + 2. \\ &= z^4 - 4z^2 - z + 2 = P(z) \end{aligned}$$

Afin de simplifier les calculs, on peut adopter une disposition analogue à celle utilisée pour la division des nombres :

$P(z) = z^4 - 4z^2 - z + 2$	$z - 2$	
$z^3 \times (z - 2)$	$\underline{z^4 - 2z^3}$	$z^3 + 2z^2 - 1$
$P_1(z) = P(z) - z^3(z - 2)$	$2z^3 - 4z^2 - z + 2$	
$2z^2 \times (z - 2)$	$\underline{2z^3 - 4z^2}$	
$P_2(z) = P_1(z) - 2z^2(z - 2)$	$-z + 2$	
$(-1) \times (z - 2)$	$\underline{-z + 2}$	
$P_2(z) - (-1)(z - 2)$		0

Exercice résolu 2 Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue

On définit le polynôme P pour tout complexe z par : $P(z) = z^3 + 2z^2 - 1$.

1 Vérifier que -1 est une racine de P .

2 En déduire les autres racines de P .

▼ Solution commentée

1 $P(-1) = (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$, donc -1 est une racine de P .

2 Puisque (-1) est une racine de P , alors P est factorisable par $(z + 1)$ donc il existe une fonction polynôme du second degré Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = (z + 1)Q(z) = (z + 1)(az^2 + bz + c)$.

On reprend l'une des méthodes exploitées dans l'exercice résolu 1 pour démontrer que $Q(z) = z^2 + z - 1$.

D'où $P(z) = (z + 1)(z^2 + z - 1)$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 1) = 0$ ou $z^2 + z - 1 = 0$, il reste à résoudre $z^2 + z - 1 = 0$. $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$.

$\Delta > 0$: deux racines réelles : $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Les racines de P sont : $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et (-1) .