MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 4

Connaître le cours

1. Équations du second degré à coefficients réels

1. Équation du type $z^2 = a$

Propriété

DÉMO en ligne

Soit a un réel non nul.
L'équation $z^2 = a$ admet toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$:
- si $a = 0$, la solution est 0.
- si $a > 0$, les solutions sont les réels $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- si $a < 0$, les solutions sont les imaginaires purs $\mathrm{i}\sqrt{a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{a}$.

2. Équations du type $az^2 + bz + c = 0$

Propriété

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution réelle, dite racine double : $z = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Remarque

Lorsque le discriminant est négatif, il suffit de déterminer l'une des solutions. L'autre s'obtient en prenant le conjugué de la première.

Exemple

Le discriminant de l'équation (E) $z^2 + z + 1 = 0$ est $\Delta = -3$.

Les solutions de (E) sont les complexes conjugués : $z_1 = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

3. Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
On considère le polynôme P tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait $P(z) = az^2 + bz + c = 0$.
On note z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$, avec éventuellement $z_1 = z_2$.
Alors pour tout z de $\mathbb{C}$, on a $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exemple

On définit le polynôme P par $P(z) = z^2 - 2z + 5$.
Le discriminant de l'équation $P(z) = 0$ est $\Delta = -16$.
Les solutions de cette équation sont les complexes conjugués : $z_1 = \dfrac{2-4\mathrm{i}}{2} = 1 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + 2\mathrm{i}$.
Par conséquent, on peut factoriser $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - (1-2\mathrm{i}))(z - (1+2\mathrm{i}))$.

Exercice résolu 1 Résoudre une équation de degré 2 dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $2z^2+3z-5=0$
2. $z^2-3z+\frac{9}{4}=0$
3. $z^2-4z+8=0$

Solution commentée

1. $\Delta=3^2-4\times2\times(-5)=9+40=49$.
$\Delta>0$, donc l'équation possède deux solutions réelles :
$z_1=\frac{-3-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{-3-7}{4}=-\frac{5}{2}$ et $z_2=\frac{-3+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{-3+7}{4}=1$.

2. $\Delta=(-3)^2-4\times1\times\frac{9}{4}=9-9=0$.
$\Delta=0$, donc l'équation possède une solution double : $z_0=\frac{-3}{2\times1}=-\frac{3}{2}$.

3. $\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=16-32=-16$.
$\Delta<0$, donc l'équation possède deux solutions complexes conjuguées :
$z_1=\frac{4-\mathrm{i}\sqrt{-(-16)}}{2\times1}=\frac{4-4\mathrm{i}}{2}=2-2\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=\overline{2-2\mathrm{i}}=2+2\mathrm{i}$.

Exercice résolu 2 Résoudre une équation se ramenant à une équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^4+2z^2-8=0$
2. $\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z}+13=0$

Solution commentée

1. Il s'agit d'une équation bicarrée, on pose $Z=z^2$ et l'équation devient : $Z^2+2Z-8=0$.
1re étape : Résolution en Z
$\Delta=2^2-4\times1\times(-8)=4+32=36$.
$\Delta>0$, donc l'équation possède deux racines réelles :
$Z_1=\frac{-2-\sqrt{36}}{2\times1}=\frac{-2-6}{2}=-\frac{8}{2}=-4$ et $Z_2=\frac{-2+\sqrt{36}}{2\times1}=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$.
2e étape : Résolution en z
$z^2=Z_1=-4$, donc $z=2\mathrm{i}$ ou $z=-2\mathrm{i}$.
$z^2=Z_2=2$, donc $z=\sqrt{2}$ ou $z=-\sqrt{2}$.
Donc l'équation $z^4+2z^2-8=0$ possède quatre racines : $2\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

2. Pour tout $z\neq0$, on a :
$\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z}+13=0\Leftrightarrow\frac{1-4z+13z^2}{z^2}=0\Leftrightarrow13z^2-4z+1=0$.
$\Delta=(-4)^2-4\times13\times1=16-52=-36$.
$\Delta<0$, donc l'équation possède deux solutions complexes conjuguées :
$z_1=\frac{4-\mathrm{i}\sqrt{-(-36)}}{2\times13}=\frac{4-6\mathrm{i}}{26}=\frac{2-3\mathrm{i}}{13}$ et $z_2=\overline{z_1}=\overline{\left(\frac{2-3\mathrm{i}}{13}\right)}=\frac{2+3\mathrm{i}}{13}$.
Les solutions de $13z^2-4z+1=0$ sont $\frac{2-3\mathrm{i}}{13}$ et $\frac{2+3\mathrm{i}}{13}$, qui sont non nulles, donc ce sont aussi les solutions de $\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z}+13=0$.

2. Factorisation des polynômes

1. Fonction polynôme

Définitions

- Soient n un entier naturel et $a_0, a_1, \dots a_n$ des réels (éventuellement des complexes) avec $a_n \neq 0$. Une **fonction polynôme**, ou **polynôme**, P est une fonction définie sur $\mathbb{C}$ qui admet une unique écriture polynomiale, à savoir, pour tout nombre complexe z, $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$.
- Le **polynôme nul** est le polynôme P tel que pour tout complexe z : $P(z) = 0$.
- Si P n'est pas le polynôme nul, n est le **degré** de P.
- On appelle **racine** d'un polynôme tout complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

Exemple

- $P(z) = 3$ est un polynôme constant, son degré est 0.
- $P(z) = 3z^3$ est un **monôme** de degré 3.

Propriété (admise)

Un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

2. Factorisation par $z - a$

Définition

On dit qu'un polynôme P est **factorisable** (ou divisible) par $z - a$ s'il existe un polynôme Q tel que : $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Exemple

$P(z) = z^2 - 4$ est factorisable par $z - 2$ puisque $P(z) = (z-2)(z+2)$.

Propriété

DÉMO p. 81

Soit a un nombre complexe.
Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $z^n - a^n$ est factorisable par $z - a$.

On a : $z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots + a^{n-2} z + a^{n-1}\right) = (z-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right)$.

Propriété

DÉMO p. 81

Le polynôme P est factorisable par $z - a$ si et seulement si a est une racine de P.

3. Degré et racines

Propriété

DÉMO p. 80

Un polynôme non nul P, de degré n, admet au plus n racines distinctes.

Remarque

Si un polynôme de degré n s'annule pour au moins $n + 1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

Exercice résolu 1 Factoriser un polynôme dont une racine est connue

On définit le polynôme P pour tout complexe z par : $P(z)=z^4-4z^2-z+2$.

1. Vérifier que 2 est une racine de P.
2. En déduire une factorisation de P.

Solution commentée

1. $P(2)=2^4-4\times 2^2-2+2=16-16-2+2=0$, donc 2 est bien une racine de P.

2. Comme $P(2)=0$, on sait que P est factorisable par $(z-2)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q tel que, pour tout complexe z, $P(z)=(z-2)Q(z)$. Comme P est de degré 4 et $z-2$ est de degré 1, alors Q est de degré $4-1=3$. Donc $Q(z)$ est de la forme az^3+bz^2+cz+d où a, b, c et d sont des réels à déterminer.

MÉTHODE 1 : La méthode des coefficients indéterminés.

Ainsi $P(z)=(z-2)\left(az^3+bz^2+cz+d\right)$.

$P(z)=az^4+bz^3+cz^2+dz-2az^3-2bz^2-2cz-2d=az^4+(b-2a)z^3+(c-2b)z^2+(d-2c)z-2d$.

On peut facilement identifier a et d : $a=1$ et $-2d=2\Leftrightarrow d=-1$.

En identifiant les coefficients des termes de degré 2 et 3, on est ramené à résoudre le système : $\begin{cases} b-2=0 \\ c-2b=-4 \\ -1-2c=-1 \end{cases}$ dont les solutions sont : $b=2$ et $c=0$. Donc $P(z)=(z-2)\left(z^3+2z^2-1\right)$

MÉTHODE 2 : La méthode de la division

On considère le terme de plus haut degré de Q, ainsi $Q(z)=z^3+R(z)$ (où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2).

On obtient : $P(z)=(z-2)\left(z^3+R(z)\right)$

En développant, on obtient :

$z^4-4z^2-z+2-(z-2)z^3=(z-2)R(z)$

soit $2z^3-4z^2-z+2=(z-2)R(z)$

Et on réitère le procédé avec R :

$R(z)=2z_2+S(z)$ (ou S est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1).

$(z-2)\left(z^3+2z^2-1\right)=z^4+2z^3-z-2z^3-4z^2+2.$

$=z^4-4z^2-z+2=P(z)$

Afin de simplifier les calculs, on peut adopter une disposition analogue à celle utilisée pour la division des nombres :

$P(z)$	z^4-4z^2-z+2	$z-2$
$z^3\times(z-2)$	z^4-2z^3	z^3+2z^2-1
$P_1(z)=P(z)-z^3(z-2)$	$2z^3-4z^2-z+2$	
$2z^2\times(z-2)$	$2z^3-4z^2$	
$P_2(z)=P_1(z)-2z^2(z-2)$	$-z+2$	
$(-1)\times(z-2)$	$-z+2$	
$P_2(z)-(-1)(z-2)$	0	

Exercice résolu 2 Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue

On définit le polynôme P pour tout complexe z par : $P(z)=z^3+2z^2-1$.

1. Vérifier que -1 est une racine de P.
2. En déduire les autres racines de P.

Solution commentée

1. $P(-1)=(-1)^3+2\times(-1)^2-1=-1+2-1=0$, donc -1 est une racine de P.

2. Puisque (-1) est une racine de P, alors P est factorisable par $(z+1)$ donc il existe une fonction polynôme du second degré Q telle que pour tout $z\in\mathbb{C}$: $P(z)=(z+1)Q(z)=(z+1)\left(az^2+bz+c\right)$.

On reprend l'une des méthodes exploitées dans l'exercice résolu 1 pour démontrer que $Q(z)=z^2+z-1$.

D'où $P(z)=(z+1)\left(z^2+z-1\right)$.

$P(z)=0\Leftrightarrow(z+1)=0$ ou $z^2+z-1=0$, il reste à résoudre $z^2+z-1=0$. $\Delta=1^2-4\times1\times(-1)=5$.

$\Delta>0$: deux racines réelles : $z_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Les racines de P sont : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et (-1).