MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 4

Équations différentielles et primitives

Connaître le cours

1. Équations différentielles

1. Généralités

Définition

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.
L'égalité qui forme l'équation se présente comme une relation entre la fonction inconnue, une ou plusieurs de ses dérivées successives, et potentiellement d'autres fonctions.

Remarque

La fonction inconnue est en général notée y. On peut également utiliser d'autres notations comme f ou même parfois x.

Exemple

$y' - 4y = 3x - 1$ est une équation différentielle.
La fonction inconnue est notée y. C'est une fonction de la variable x. La notation y' désigne la dérivée de la fonction y. Le membre de droite de l'équation est la fonction affine $x \mapsto 3x - 1$.

Propriété

Résoudre une équation différentielle signifie trouver toutes les fonctions qui vérifient l'équation.

Remarque

Lorsque l'on résout une équation différentielle, on cherche en général des fonctions définies sur le plus grand intervalle possible.

2. Équation différentielle de la forme $y' = f$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction dérivable sur I solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemple

On considère l'équation différentielle $y' = 2x + 4$.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 + 4x - 1$ est une solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.
La fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x + 4$.

Théorème (admis)

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
- Pour tout réel k, la fonction $F + k$ est une primitive de f sur I.
- Si G est une primitive de f sur I, alors il existe un réel k tel que $G = F + k$.

Propriété (admise)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

Méthode 1 Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Dans chaque cas, vérifier que la fonction donnée est bien solution de l'équation différentielle.

1. $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et (E_1) l'équation différentielle $y' = 6x - 2$.
2. $g : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et (E_2) l'équation différentielle $y' - y = \mathrm{e}^x$.
3. $h : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ et (E_3) l'équation différentielle $y' - 2y = \dfrac{-2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

Solution commentée

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 6x - 2$, donc f est solution de (E_1).

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + g(x)$, donc $g'(x) - g(x) = \mathrm{e}^x$.
La fonction g est donc bien une solution de l'équation différentielle (E_2).

3. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right) + \mathrm{e}^{2x}\dfrac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.
Ainsi, $h'(x) - 2h(x) = 2\mathrm{e}^{2x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right) + \mathrm{e}^{2x}\dfrac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - 2\mathrm{e}^{2x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right) = -\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.
La fonction h est donc bien une solution de l'équation différentielle (E_3).

Méthode 2 Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = f$

Dans chaque cas, vérifier que les fonctions données sont bien solutions de l'équation différentielle.

1. $f_1 : x \mapsto x^2 + 1$ et $g_1 : x \mapsto x^2 - 4$ pour l'équation différentielle $y' = 2x$.
2. $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ et $g_2 : x \mapsto \ln(x) + 4$ pour l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{x}$.

Solution commentée

1. $f_1'(x) = 2x$, donc f_1 vérifie $y' = 2x$ et $g_1'(x) = 2x$, donc g_1 vérifie $y' = 2x$.
f_1 et g_1 sont solutions de l'équation différentielle $y' = 2x$.

2. $f_2'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc f_2 vérifie $y' = \dfrac{1}{x}$ et $g_2'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc g_2 vérifie $y' = \dfrac{1}{x}$.
f_2 et g_2 sont solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{x}$.

Méthode 3 Déterminer des primitives

On considère l'équation différentielle (E) $y' = (x+1)\mathrm{e}^x$.

1. Vérifier que la fonction $H : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. En déduire toutes les primitives de $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$.
3. Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 2$.

Solution commentée

1. $H'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$.
La fonction H est donc bien solution de l'équation différentielle $y' = (x+1)\mathrm{e}^x$.

2. Les primitives de f sont les fonctions F de la forme $F(x) = x\mathrm{e}^x + k$, avec k constante réelle.

3. On cherche k tel que $F(1) = 2$: $F(1) = 2 \Leftrightarrow 1 \times \mathrm{e}^1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - \mathrm{e}$.
La primitive de f, dont l'image de 1 est 2, est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x\mathrm{e}^x + 2 - \mathrm{e}$.

2. Primitives d'une fonction continue

1. Primitives des fonctions usuelles

Propriété

La fonction $f : x \mapsto$ ...	a une primitive $F : x \mapsto$ ...	sur l'intervalle $I =$ ...
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $n \neq -1$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	Si $n > 0$: $\mathbb{R}$ Si $n \leqslant -2$: $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Remarque

On obtient ce tableau par « lecture inverse » du tableau des dérivées usuelles.

2. Primitives et opérations

Théorème

Soient f et g deux fonctions admettant respectivement F et G comme primitives sur un intervalle I et soit λ un réel. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I et λF est une primitive de λf sur I.

Remarque

Ce théorème se déduit des opérations sur les fonctions dérivables.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{5}{x}$.

La fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 5\ln(x)$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f du type ...	a une primitive F du type ...	Conditions
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $n \neq -1$)	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n \leqslant -2$, $u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$2u'u$	u^2	Pour tout réel x de I
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$	$u(x) > 0$ pour tout x de I ou $u(x) < 0$ pour tout x de I.
$u'e^u$	e^u	Pour tout réel x de I.

Méthode 1 Utiliser la formule d'une primitive de $x \mapsto x^n$

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.
Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2 Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}$.
Déterminer une primitive G de g sur $]0\,;+\infty[$.

Solution commentée

1 On sait que, pour tout entier n différent de 0 et -1, une primitive de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Donc :

- une primitive de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x^4}{4}$, donc une primitive de $x \mapsto 2x^3$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 2 \times \frac{x^4}{4} = \frac{1}{2}x^4$;
- une primitive de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$, donc une primitive de $x \mapsto -5x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -5 \times \frac{x^3}{3} = -\frac{5}{3}x^3$;
- une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$, donc une primitive de $x \mapsto 4x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 4 \times \frac{x^2}{2} = 2x^2$;
- une primitive de $x \mapsto -1$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -x$.

Donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$, donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ sur $]0\,;+\infty[$ est $x \mapsto \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{-1}{3x^3}$.
$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$, donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ sur $]0\,;+\infty[$ est $x \mapsto \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2}$.
La fonction G définie sur $]0\,;+\infty[$ par $G(x) = \frac{-1}{3x^3} + \frac{1}{x^2}$ est donc une primitive de g sur $]0\,;+\infty[$.

Méthode 2 Reconnaître la forme d'une fonction pour en déterminer une primitive

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une primitive F de la fonction f donnée sur l'intervalle I donné.

1 $f(x) = 2x\left(x^2 - 1\right)^4$; $I = \mathbb{R}$.

2 $f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}$; $I = \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

3 $f(x) = \frac{-3}{5-3x}$; $I = \left]-\infty\,;\frac{5}{3}\right[$.

4 $f(x) = 3x^2\mathrm{e}^{x^3}$; $I = \mathbb{R}$.

Solution commentée

1 f est de la forme $u'u^4$ avec $u(x) = x^2 - 1$, donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par
$F(x) = \frac{u(x)^5}{5} = \frac{1}{5}\left(x^2 - 1\right)^5$.

2 f est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $u(x) \neq 0$ sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, donc une primitive de f sur $I = \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ est la fonction F définie par $F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{2x+1}$.

3 f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 5 - 3x$ et $u(x) > 0$ sur $\left]-\infty\,;\frac{5}{3}\right[$, donc une primitive de f sur $\left]-\infty\,;\frac{5}{3}\right[$ est la fonction F définie par $F(x) = \ln(u(x)) = \ln(5 - 3x)$.

4 f est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^3$, donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par
$F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{x^3}$.

Connaître le cours

3. Équations différentielles $y'=ay+b$

1. Équations différentielles de la forme $y' = ay$

Théorème

Soit a un réel.
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.
Si, de plus, pour deux réels x_0 et k donnés, $y(x_0) = k$, alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{a(x-x_0)}$ est l'unique fonction solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

DÉMONSTRATION

Soit C un réel. Les fonctions f de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ vérifient $f'(x) = Cae^{ax} = af(x)$.
Elles sont donc bien solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.

Réciproquement.
Soit g une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
La fonction $x \mapsto e^{ax}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On pose $h(x) = e^{-ax} g(x)$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$. On utilise la dérivée d'un produit :
$h'(x) = -ae^{-ax} g(x) + e^{-ax} g'(x) = e^{-ax} (-ag(x) + g'(x)) = e^{-ax} (-ag(x) + ag(x)) = 0$, car g vérifie $g'(x) = ag(x)$.
$h'(x) = 0$, donc la fonction h est constante. Il existe donc un réel C tel que, pour tout x réel, $h(x) = C$.
On en conclut donc que $g(x) = Ce^{ax}$.
Ainsi, les fonctions solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.
De plus, si $y(x_0) = k$, alors $Ce^{ax_0} = k$ ce qui équivaut à $C = ke^{-ax_0}$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{a(x-x_0)}$ est l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant $f(x_0) = k$.

2. Équations différentielles de la forme $y' = ay + b$

Théorème (admis)

Soient a et b deux réels non nuls. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

Remarque

- La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est la solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$.
- Les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ sont les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.

Exemple

On considère l'équation (E) $y' = 3y - 2$. On a $a = 3$ et $b = -2$.
Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = Ce^{3x} + \frac{2}{3}, \text{ avec } C \text{ réel.}$$

Théorème (admis)

Soient x_0 et k deux réels fixés.
Il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = k$.

Méthode 1 Résoudre $y'=ay$

Dans chaque cas, résoudre l'équation différentielle.

1. $y' = -4y$
2. $2y' + 5y = 0$

Solution commentée

1. L'équation est de la forme $y' = ay$ avec $a = -4$, donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-4x}$, où C est une constante réelle.

2. $2y' + 5y = 0 \Leftrightarrow 2y' = -5y \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{2}y$

L'équation est de la forme $y' = ay$ avec $a = -\frac{5}{2}$, donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-\frac{5}{2}x}$, où C est une constante réelle.

Méthode 2 Résoudre $y'=ay+b$

Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + 1$.

Solution commentée

On considère l'équation (E) $y' = -y + 1$.
L'équation est de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -1$ et $b = 1$.
Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a} = Ce^{-1x} - \frac{1}{(-1)} = Ce^{-x} + 1$, où C est une constante réelle.

Méthode 3 Résoudre des équations différentielles avec condition initiale

Déterminer la solution de l'équation différentielle $3y' - 2y = 3$ vérifiant $y(1) = 2$.

Solution commentée

$3y' - 2y = 3 \Leftrightarrow 3y' = 2y + 3 \Leftrightarrow y' = \frac{2y+3}{3} \Leftrightarrow y' = \frac{2}{3}y + 1$.

L'équation est de la forme $y' = ay + b$, avec $a = \frac{2}{3}$ et $b = 1$.

Les solutions de l'équation différentielle $3y' - 2y = 3$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$y(x) = Ce^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{2}$ avec C constante réelle.

De plus : $y(1) = 2 \Leftrightarrow Ce^{\frac{2}{3}\times 1} - \frac{3}{2} = 2 \Leftrightarrow Ce^{\frac{2}{3}} = 2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\frac{7}{2}}{e^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{2}e^{-\frac{2}{3}}$.

La solution de l'équation différentielle $3y' - 2y = 3$ vérifiant $y(1) = 2$ est donc la fonction y définie par :

$$y(x) = \frac{7}{2}e^{-\frac{2}{3}} \times e^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}e^{\frac{2}{3}(x-1)} - \frac{3}{2}$$