MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 1

DERIVATION -CONVEXITE - CONTINUITE

1. Compléments de dérivation

1. Fonctions composées

Définition

Soient u et v deux fonctions dont les ensembles de définition respectifs sont notés $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$.
La **fonction composée de u par v**, notée $v \circ u$, est la fonction définie par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.
L'ensemble de définition de $v \circ u$ est l'ensemble des réels x appartenant à $\mathcal{D}_u$ dont l'image par u appartient à $\mathcal{D}_v$.

Exemple

Soit $u : x \mapsto 2x+6$, définie sur $\mathbb{R}$, et $v : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0\,;+\infty[$.
$v(u(x))$ existe si et seulement si $u(x)$ existe et est positif. Or $2x+6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3$, donc la fonction composée $v \circ u$ est définie sur $[-3\,;+\infty[$ par $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(2x+6) = \sqrt{2x+6}$.
La fonction composée $u \circ v$ est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}+6$.

Remarque

En général, $v \circ u \neq u \circ v$.

2. Dérivée d'une fonction composée

Propriété

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J telles que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$.

Cas particuliers

- La fonction f, définie sur I par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
- Si, pour tout x de I, $u(x) > 0$, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et
$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- Soit n un entier relatif non nul et f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$.
Si $n \geqslant 1$, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.
Si $n \leqslant -1$ et si u ne s'annule pas sur I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

3. Dérivée seconde

Définitions

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
La fonction f est **deux fois dérivable** sur I si f' est elle-même dérivable sur I.
On note f'' la dérivée de f'. Elle est appelée **dérivée seconde** de f.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x + \mathrm{e}^x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2 + 5 + \mathrm{e}^x$.
f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $(f')'(x) = 6x + \mathrm{e}^x$.
f est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est définie par $f''(x) = 6x + \mathrm{e}^x$.

Méthode 1 Composer des fonctions

Soient u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$, v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 3x - 1$ et w la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $w(x) = \sqrt{x}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de $u \circ v$, puis déterminer explicitement $(u \circ v)(x)$.
2. Préciser l'ensemble de définition de $v \circ u$, puis déterminer explicitement $(v \circ u)(x)$.
3. Préciser l'ensemble de définition de $v \circ w$, puis déterminer explicitement $(v \circ w)(x)$.
4. Préciser l'ensemble de définition de $w \circ v$, puis déterminer explicitement $(w \circ v)(x)$.

Solution commentée

1. La fonction $u \circ v$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(3x-1) = (3x-1)^2$$

2. La fonction $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v\left(x^2\right) = 3x^2 - 1$$

On remarque que $v \circ u \neq u \circ v$.

3. La fonction v est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction w est définie sur $[0\ ;+\infty[$, donc $v \circ w$ est définie sur $[0\ ;+\infty[$.

$$(v \circ w)(x) = v(w(x)) = v\left(\sqrt{x}\right) = 3\sqrt{x} - 1$$

4. La fonction v est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction w est définie sur $[0\ ;+\infty[$, donc $w \circ v$ est définie sur l'ensemble des réels x tels que $3x-1 \in [0\ ;+\infty[$, c'est-à-dire sur $\left[\frac{1}{3}\ ;+\infty\right[$.

$$(w \circ v)(x) = w(v(x)) = w(3x-1) = \sqrt{3x-1}$$

Méthode 2 Dériver une fonction composée

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la dérivée de la fonction g sur l'intervalle I donné.

1. g est la fonction définie sur $[2\ ;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{2x-4}$; $I =]2\ ;+\infty[$.
2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(x^2-1\right)^4$; $I = \mathbb{R}$.
3. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{x^2-3}$; $I = \mathbb{R}$.

Solution commentée

1. $g(x) = \sqrt{u(x)}$, avec $u(x) = 2x-4$. $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$.
2. $g(x) = (u(x))^4$, avec $u(x) = x^2 - 1$.
   $g'(x) = 4 \times u'(x) \times (u(x))^{4-1} = 4 \times 2x \times \left(x^2-1\right)^3 = 8x\left(x^2-1\right)^3$
3. $g(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, avec $u(x) = x^2 - 3$.
   $g'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = 2x\mathrm{e}^{x^2-3}$

Méthode 3 Calculer une dérivée seconde

On admet que $f : x \mapsto x^2 + x - 2$ est deux fois dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

- Calculer sa dérivée seconde f''.

Solution commentée

On calcule d'abord la dérivée de f : $f'(x) = 2x + 1$, puis la dérivée de f' : $f''(x) = 2$.

2. Convexité : approche graphique

1. Fonctions convexes et concaves

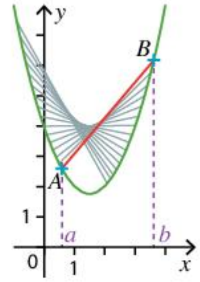
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

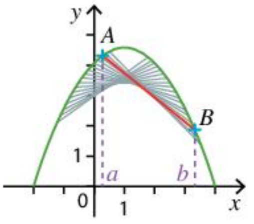
- f est **convexe** sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}$ située entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est **en dessous** de la sécante (AB).
- f est **concave** sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}$ située entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est **au-dessus** de la sécante (AB).

Exemples

- La fonction représentée ci-dessous est convexe.



- La fonction représentée ci-dessous est concave.



- La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0\,;+\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.

Remarque

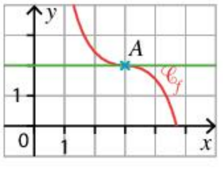
Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe et sur quel(s) intervalle(s) elle est concave.

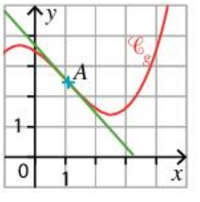
2. Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A un point de $\mathscr{C}$.
A est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}$ si $\mathscr{C}$ admet une tangente en A et si $\mathscr{C}$ traverse cette tangente en A.

Exemples



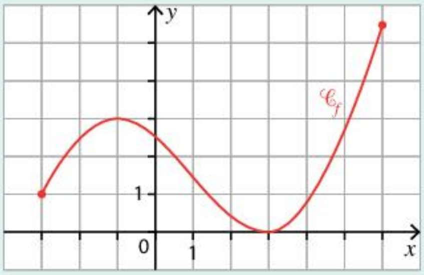


Remarque

En l'abscisse d'un point d'inflexion A de la courbe représentative de f, la fonction f change de convexité.

Méthode 1 Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 6]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



1 Déterminer graphiquement le tableau de variation de la fonction f sur $[-3\ ;\ 6]$.

2 Déterminer graphiquement le (ou les) intervalle(s) où f est convexe et celui (ou ceux) où f est concave.

Solution commentée

1 Graphiquement, on obtient le tableau de variation ci-dessous.

x	-3		-1		3		6
$f(x)$	1	↗	3	↘	0	↗	5,5

2 La fonction f semble concave sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$, car toute sécante formée par des points de la courbe semble être en dessous de la courbe.
La fonction f semble convexe sur l'intervalle $[1\ ;\ 6]$, car toute sécante formée par des points de la courbe semble être au-dessus de la courbe.

Méthode 2 Déterminer graphiquement l'existence d'un point d'inflexion

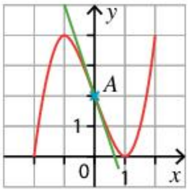
On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1 Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur $[-2\ ;\ 2]$.

2 Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0. Tracer $\mathscr{T}_0$.

3 En déduire graphiquement l'abscisse d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Solution commentée



1 Voir le graphique ci-contre.

2 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 3x^2 - 3$.
On a donc $f'(0) = -3$. De plus, $f(0) = 2$.
Au point A d'abscisse 0, l'équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

La tangente $\mathscr{T}_0$ au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = -3x + 2$.

3 Au point A d'abscisse 0, on observe que la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse la tangente $\mathscr{T}_0$. Le point A semble donc être un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

3. Convexité des fonctions dérivables

1. Caractérisations de la convexité

Propriétés (admises)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est convexe sur l'intervalle I.
- f'' est positive sur l'intervalle I.
- f' est croissante sur I.

Les propositions suivantes sont équivalentes :
- f est concave sur l'intervalle I.
- f'' est négative sur l'intervalle I.
- f' est décroissante sur I.

Exemple

On considère la fonction polynôme f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.
La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $f''(x) = 6$.
La fonction f'' est positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

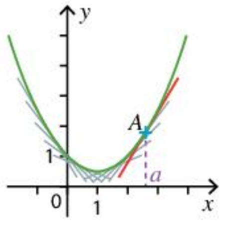
2. Convexité et tangentes

Propriétés

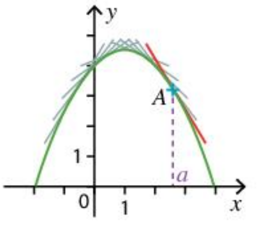
Soient f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Soit I un intervalle sur lequel f est dérivable.
- Sur l'intervalle I, f est convexe si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.
- Sur l'intervalle I, f est concave si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes.

Exemples

- La fonction f représentée ci-dessous est convexe.



- La fonction g représentée ci-dessous est concave.



Remarque

Une fonction croissante et convexe sur un intervalle I est une fonction qui croît « de plus en plus vite » sur I. Si elle est dérivable sur I, les pentes des tangentes à sa courbe représentative augmentent quand les abscisses augmentent.
Pour une fonction croissante et concave, c'est le contraire : elle croît « de moins en moins vite ».

3. Point d'inflexion

Propriétés (admises)

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et a un réel appartenant à I.
- Si f' change de sens de variation en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.
- Si f'' s'annule et change de signe en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

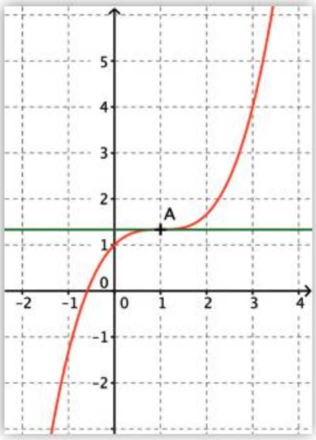
Méthode 1 Utiliser la dérivée seconde pour étudier la convexité d'une for

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de géométrie, conjecturer la convexité de f et les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
2. Calculer la dérivée seconde de f.
3. En déduire la convexité de f.
4. Justifier l'existence d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, que l'on précisera.

Solution commentée

1. On conjecture sur la figure ci-contre, obtenue avec un logiciel de géométrie, que f est concave sur $]-\infty ; 1]$ et convexe sur $[1 ; +\infty[$ et que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 1, noté A sur la figure.



2. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme, et $f'(x)=x^2-2x+1$. Donc $f''(x)=2x-2$.

3. $f''(x)=2x-2=2(x-1)$
Pour tout réel x appartenant à $]-\infty ; 1]$, $f''(x)\leqslant 0$, donc f est concave sur $]-\infty ; 1]$.
Pour tout réel x appartenant à $[1 ; +\infty[$, $f''(x)\geqslant 0$, donc f est convexe sur $[1 ; +\infty[$.

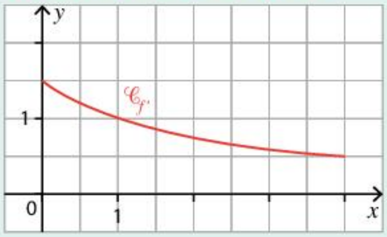
4. En $x=1$, f'' s'annule en changeant de signe, donc $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse 1.

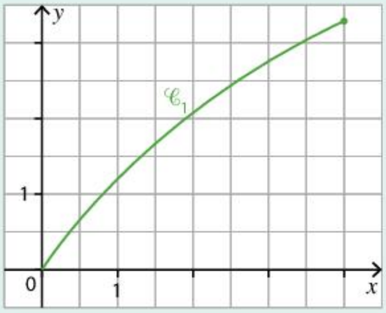
Méthode 2 Relier convexité d'une fonction et sens de variation de sa dérivée

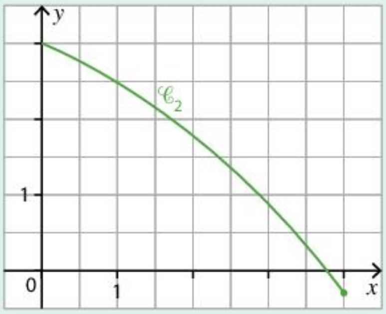
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0 ; 4]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de sa fonction dérivée f', représentée ci-contre.

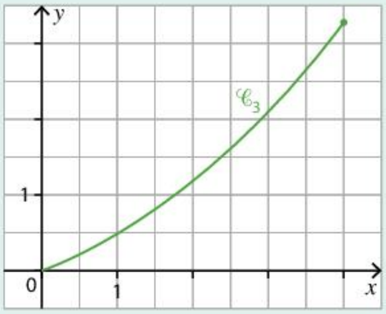
- $\mathscr{C}_f$ est l'une des trois courbes ci-dessous.

Préciser laquelle en justifiant clairement la réponse.









Solution commentée

$\mathscr{C}_{f'}$ est au-dessus de l'axe des abscisses, donc f' est positive, donc f est une fonction croissante, ce qui élimine la courbe $\mathscr{C}_2$.
De plus, l'allure de $\mathscr{C}_{f'}$ indique que f' est décroissante et donc que f est concave : la courbe représentative de f est donc la courbe $\mathscr{C}_1$

4. Fonctions continues

1. Fonction continue sur un intervalle

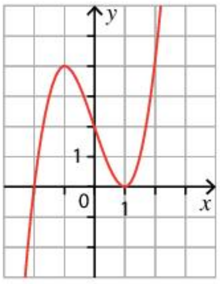
Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit $a \in I$. On dit que f est **continue en a** lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est **continue sur I** si, pour tout réel a appartenant à I, f est continue en a.

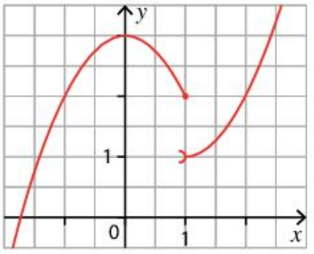
Exemples

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$



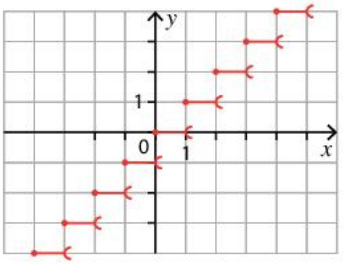
f est continue sur $\mathbb{R}$.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



f n'est pas continue en 1, donc elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.



Quel que soit n entier, f n'est pas continue en n, donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

2. Propriétés

Propriétés (admises) : continuité des fonctions usuelles

- Les fonctions affines, les fonctions polynômes, la fonction racine carrée et la fonction exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur chacun des intervalles formant leur ensemble de définition.

Exemple

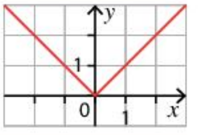
La fonction f, définie sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$, est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions polynômes.

Propriété (admise) : continuité et dérivabilité

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en 0.



Propriété (admise) : continuité et suites convergentes

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a un réel appartenant à I et (u_n) une suite à valeurs dans I.

Si (u_n) converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Méthode 1 Étudier une fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x & \text{si } x \leqslant -1\\ -x & \text{si } x > -1\end{cases}$.

1 Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

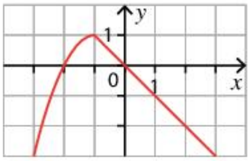
2 Étudier la continuité de la fonction f :

a. sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$; b. sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$; c. en -1.

3 Que peut-on en conclure ?

Solution commentée

1 Voir le graphique ci-contre.



2 a. La fonction $x \mapsto -x^2-2x$ est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-\infty\,;-1]$.

b. La fonction $x \mapsto -x$ est une fonction affine, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-1\,;+\infty[$.

c. D'une part, f est continue sur $]-\infty\,;-1]$, avec $f(-1)=1$. On a donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=f(-1)=1$.

D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} (-x)=1$.

Finalement : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=1=f(-1)$. La fonction f est donc continue en -1.

3 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 Calculer la limite d'une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0=1$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x+2$.

On admet que (u_n) converge et on note ℓ la limite de (u_n).

1 Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

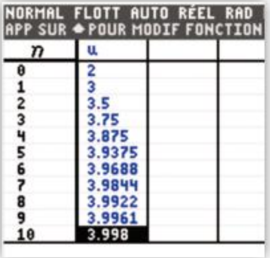
2 À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, conjecturer la valeur de ℓ.

3 Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=\alpha$.

4 Démontrer la conjecture de la question 2 en utilisant la continuité de f.

Solution commentée

1 La fonction f est affine, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD
APP SUR ◆ POUR MODIF FONCTION

n	u
0	2
1	3
2	3.5
3	3.75
4	3.875
5	3.9375
6	3.9688
7	3.9844
8	3.9922
9	3.9961
10	3.998

2 À l'aide d'une calculatrice (voir ci-contre), on conjecture que la limite de la suite (u_n) est 4.

3 On résout l'équation $f(x)=x$. $f(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+2=x \Leftrightarrow x=4$.

Le nombre 4 est donc l'unique réel égal à sa propre image par f.

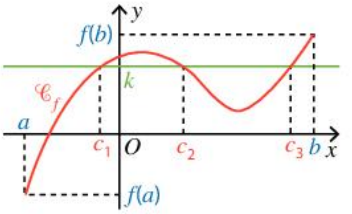
4 f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc, puisque (u_n) converge vers ℓ, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. Or la suite $(f(u_n))$ est la suite (u_{n+1}), qui a la même limite que (u_n), donc la limite ℓ vérifie $\ell=f(\ell)$. D'après la question 3, l'unique solution de cette équation est 4. La suite (u_n) converge donc vers 4.

5. Théorème des valeurs intermédiaire

1. Cas d'un intervalle fermé

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.



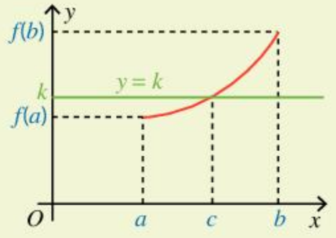
Remarque

Cela signifie que, quand x varie de a à b, $f(x)$ prend toutes les valeurs intermédiaires comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires (admis)

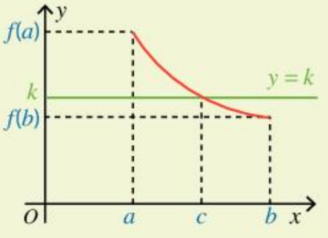
Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Cas où f est strictement croissante :



x	a	c	b
$f(x)$	$f(a)$	k	$f(b)$

- Cas où f est strictement décroissante :



x	a	c	b
$f(x)$	$f(a)$	k	$f(b)$

Remarque

Dans un tableau de variation, les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré.

2. Extension à d'autres intervalles

Théorème (admis)

a désigne soit un réel, soit $-\infty$; b désigne soit un réel, soit $+\infty$.
Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle $]a\ ;\ b[$.

- Pour tout réel k strictement compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $]a\ ;\ b[$.
- Si, de plus, f est strictement monotone sur $]a\ ;\ b[$, alors cette solution est unique.

Remarque

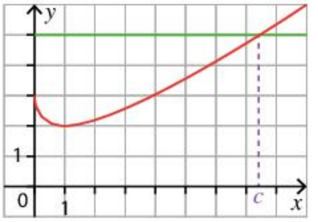
On peut étendre ce théorème à un intervalle semi-ouvert $[a\ ;\ b[$ ou $]a\ ;\ b]$.

Méthode 1 Prouver l'existence d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3$.

- Prouver que l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[4\,;9]$.

Solution commentée



La fonction $x \mapsto x + 3$ est une fonction affine continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;+\infty[$, et la fonction racine carrée est continue sur $[0\,;+\infty[$, donc, par produit et par somme de fonctions continues sur $[0\,;+\infty[$, f est continue sur $[0\,;+\infty[$.
La fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$, donc aussi sur $[4\,;9]$.
$f(4) = 3$ et $f(9) = 6$, donc $5 \in [f(4)\,;f(9)]$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[4\,;9]$.

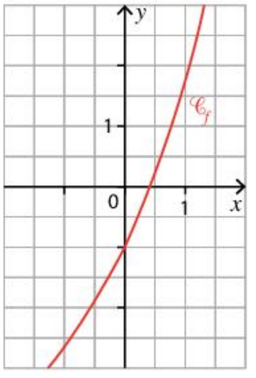
EXERCICE 37 p. 133

Méthode 2 Prouver l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x - 2$.

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère.
2. Démontrer que f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
4. Déterminer avec la calculatrice un encadrement décimal de α à 10^{-2} près.

Solution commentée



1. Voir ci-contre.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et on a $f'(x) = e^x + 1$.
Pour tout réel x, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc, par somme de limites :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc, par somme de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus ; $0 \in \left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$ donc, d'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

4. D'après le tableau de valeurs ci-contre (réalisé avec un pas de 0,01), on a :
$$0{,}44 < \alpha < 0{,}45.$$

Régler l'intervalle

0.41	-0.08318221
0.42	-0.05803844
0.43	-0.03274248
0.44	-0.007292781
0.45	0.01831219
0.46	0.04407398