MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 5

Connaître le cours

1. Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$

1. Module de $\dfrac{c-a}{b-a}$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Propriétés

Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives les nombres complexes a, b, c et d.
On a les égalités suivantes.

- $|c-a|=|a-c|=AC$.
- $|b-a|=|a-b|=AB$.
- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=\dfrac{AC}{AB}$.

Démonstration

Les deux premières égalités ont été démontrées au chapitre 2.
Comme les quatre points sont distincts, on a $b\neq a$.

$\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=\dfrac{|c-a|}{|b-a|}$ par propriété du module

et donc $\dfrac{|c-a|}{|b-a|}=\dfrac{AC}{AB}$.

2. Argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Propriété

DÉMO p. 100

Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives les nombres complexes a, b, c et d.
On a :

$\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\ (2\pi)$.

Remarques

Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives les nombres complexes a, b, c et d.
On a les propriétés suivantes.

- A appartient à la médiatrice de $[BC]$ si et seulement si $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=1$.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=0\ (\pi)$.
- Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$.

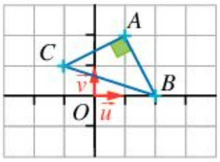
Exercice résolu 1 Étudier une configuration géométrique

Soient les points A, B et C d'affixes respectives $a=1+2\mathrm{i}$, $b=2$ et $c=-1+\mathrm{i}$.

1 Placer les trois points dans le plan complexe. Que peut-on conjecturer sur la nature du triangle ABC ?

2 Démontrer cette conjecture.

Solution commentée



1 On peut conjecturer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

2 $AB=|b-a|=|2-(1+2\mathrm{i})|=|1-2\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

$AC=|c-a|=|-1+\mathrm{i}-(1+2\mathrm{i})|=|-2-\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Comme $AB=AC$, le triangle ABC est isocèle en A.

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\arg\left(\frac{-2-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)=\arg\left(\frac{(-2-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}\right)$$

$$=\arg\left(\frac{-2-4\mathrm{i}-\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{1^2-(2\mathrm{i})^2}\right)=\arg\left(\frac{-5\mathrm{i}}{5}\right)=\arg(-\mathrm{i})=-\frac{\pi}{2}\ (2\pi).$$

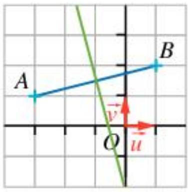
Le triangle ABC est donc rectangle en A.

Exercice résolu 2 Déterminer un ensemble de points

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition.

1 $\left|\dfrac{z+3-\mathrm{i}}{z-1-2\mathrm{i}}\right|=1$. **2** $\arg\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z-2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$. **3** $\arg\left(\dfrac{z+1-2\mathrm{i}}{z-3+\mathrm{i}}\right)=\pi\ (2\pi)$.

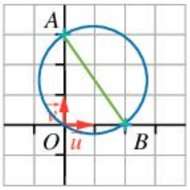
Solution commentée



1 Soient A et B les points d'affixes $a=-3+\mathrm{i}$ et $b=1+2\mathrm{i}$.
Soit un complexe z, $z\neq b$.

$$\left|\frac{z+3-\mathrm{i}}{z-1-2\mathrm{i}}\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{z-(-3+\mathrm{i})}{z-(1+2\mathrm{i})}\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=1\Leftrightarrow\frac{AM}{BM}=1\Leftrightarrow AM=BM.$$

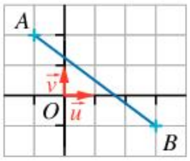
L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\left|\dfrac{z+3-\mathrm{i}}{z-1-2\mathrm{i}}\right|=1$ est la médiatrice du segment $[AB]$.



2 Soient A et B les points d'affixes $a=3\mathrm{i}$ et $b=2$.
Soit un complexe z, $z\neq a$ et $z\neq b$.

$$\arg\left(\frac{z-3\mathrm{i}}{z-2}\right)=\frac{\pi}{2}\ (\pi)\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)=\frac{\pi}{2}\ (\pi)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{2}\ (\pi).$$

L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\arg\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z-2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.



3 Soient A et B les points d'affixes $a=-1+2\mathrm{i}$ et $b=3-\mathrm{i}$.
Soit un complexe z, $z\neq a$ et $z\neq b$.

$$\arg\left(\frac{z+1-2\mathrm{i}}{z-3+\mathrm{i}}\right)=\pi\ (2\pi)\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z-(-1+2\mathrm{i})}{z-(3-\mathrm{i})}\right)=\pi\ (2\pi)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)=\pi\ (2\pi).$$

L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\arg\left(\dfrac{z+1-2\mathrm{i}}{z-3+\mathrm{i}}\right)=\pi\ (2\pi)$, est le segment $[AB]$ privé des points A et B.

Connaître le cours

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. Racines n-ièmes de l'unité

Définition

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle racine n-ième de l'unité, tout nombre complexe z tel que $z^n=1$.

Remarques

- Pour tout entier n non nul, 1 est solution de l'équation $z^n=1$.
- Les racines n-ièmes de l'unité sont les racines du polynôme z^n-1.

Propriété

DÉMO p. 100 et p. 101

Pour tout entier naturel n non nul, $z^n=1$ admet exactement n racines n-ièmes distinctes.

Ce sont les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Définition

On note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$U_n=\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \text{ entier naturel appartenant à } [0\,;n-1]\right\}.$$

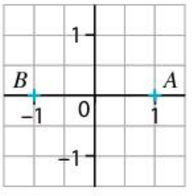
Propriété

DÉMO p. 101

Les points images des éléments de U_n, pour n entier naturel non nul, appartiennent au cercle trigonométrique.
Les points images des éléments de U_n, pour n entier naturel supérieur ou égal à 3, sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets.

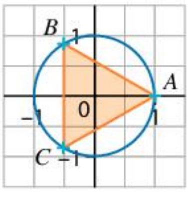
Cas particuliers

- Les racines 2-ièmes (appelées aussi racines carrées) de l'unité sont les nombres complexes z tels que $z^2=1$, soit 1 et -1.



Ce sont bien les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{2}}$ avec k entier naturel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$. En effet : $e^{i\frac{2\times0\times\pi}{2}}=e^0=1$ et $e^{i\frac{2\times1\times\pi}{2}}=e^{i\pi}=-1$. Donc $U_2=\{-1;1\}$.

- Les racines 3-ièmes de l'unité sont les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ avec k entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant 2$.

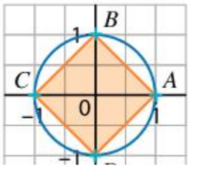


On a alors : $e^{i\frac{2\times0\times\pi}{3}}=e^0=1$, $e^{i\frac{2\times1\times\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\times2\times\pi}{3}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

On note j le nombre $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On a alors : $e^{i\frac{4\pi}{3}}=\overline{j}$. Donc $U_3=\{1;j;\overline{j}\}$.
Les racines 3-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets du triangle équilatéral ABC.

- Les racines 4-ièmes de l'unité sont les racines du polynôme z^4-1.

Or $z^4-1=(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$, les racines 4-ièmes de 1 sont donc 1, -1, i et $-$i.



Ce sont bien les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{4}}$ avec k entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant 3$.

En effet : $e^{i\frac{2\times0\times\pi}{4}}=e^0=1$, $e^{i\frac{2\times1\times\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\frac{2\times2\times\pi}{4}}=e^{i\pi}=-1$ et $e^{i\frac{2\times3\times\pi}{4}}=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$.
Donc $U_4=\{1;i;-1;-i\}$.

Exercice résolu 1 Utiliser les racines n-ièmes de l'unité

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1 $(z+2)^5=1$ **2** $z^3=-27$

Solution commentée

1 z est solution de l'équation $(z+2)^5=1$ si et seulement si $z+2$ est une racine 5-ième de 1.
On a donc : $z+2=1$ ou $z+2=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ou $z+2=e^{i\frac{4\pi}{5}}$ ou $z+2=e^{i\frac{6\pi}{5}}$ ou $z+2=e^{i\frac{8\pi}{5}}$.
Les solutions complexes de l'équation $(z+2)^5=1$ sont donc :

$$-1\,;-2+e^{i\frac{2\pi}{5}}\,;-2+e^{i\frac{4\pi}{5}}\,;-2+e^{i\frac{6\pi}{5}} \text{ et } -2+e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

2 $z^3=-27$ équivaut à $z^3=(-3)^3$ ou encore $\left(-\frac{z}{3}\right)^3=1$.
z est solution de l'équation $z^3=-27$ si et seulement si $-\frac{z}{3}$ est une racine 3-ième de 1.
On a donc : $-\frac{z}{3}=1$ ou $-\frac{z}{3}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $-\frac{z}{3}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
Les solutions complexes de l'équation $z^3=-27$ sont donc :
$-3\,;-3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $-3e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Exercice résolu 2 Calculer la somme des racines 5-ièmes de l'unité

1 Démontrer que pour tout nombre complexe z, $z^5-1=(z-1)\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)$.

2 Soit ω une racine 5-ième de 1, différente de 1.
Démontrer que les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5-1=0$, sont 1, ω, ω^2, ω^3 et ω^4.

3 Justifier que la somme des racines 5-ièmes de l'unité est nulle.

Solution commentée

1 On développe $(z-1)\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)$:
$(z-1)\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)=z+z^2+z^3+z^4+z^5-1+z+z^2+z^3+z^4=z^5-1$.
Donc pour tout nombre complexe z, $z^5-1=(z-1)\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)$.

2 Soit ω une racine 5-ième de 1, différente de 1, on a donc $\omega^5=1$.
$\left(\omega^2\right)^5=\left(\omega^5\right)^2=1^2=1$, donc ω^2 est une racine 5-ième de 1.
$\left(\omega^3\right)^5=\left(\omega^5\right)^3=1^3=1$, donc ω^3 est une racine 5-ième de 1.
$\left(\omega^4\right)^5=\left(\omega^5\right)^4=1^4=1$, donc ω^4 est une racine 5-ième de 1.
De plus, 1 est une racine 5-ième de 1.
Par ailleurs, il y a exactement 5 racines 5-ièmes de 1, donc 1, ω, ω^2, ω^3 et ω^4 sont les racines 5-ièmes de 1.

3 D'après la question **1** $\omega^5-1=(\omega-1)\left(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4\right)$.
Or $\omega^5=1$, donc $(\omega-1)\left(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4\right)=0$.
Comme $\omega\neq1$, on a alors $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$.
Ce qui prouve que la somme des racines 5-ièmes de l'unité est nulle.