MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 5

Intégration

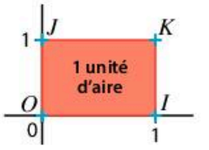
Connaître le cours

1. Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

1. Aire sous la courbe

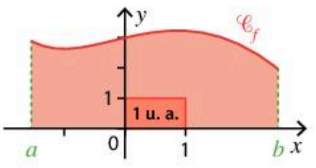
Définition

Soient un repère orthogonal $(O\,;\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et K le point de coordonnées $(1\,;1)$.
L'aire du rectangle $OIKJ$ est appelée **unité d'aire** et est notée **u.a.**



Définition

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Cette aire est exprimée en unités d'aire.
L'intégrale de a à b de la fonction f est notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



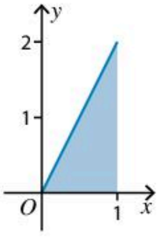
Remarque

Dans la notation de l'intégrale, la variable x peut être remplacée par toute autre variable : par exemple $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. On dit que la variable x, ou t, est « muette ».

Exemple

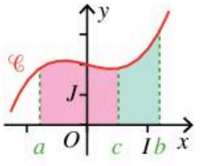
Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 2x$. La fonction f est continue et positive sur $[0\,;1]$. L'intégrale de f entre 0 et 1 est égale à l'aire du triangle ci-contre, c'est-à-dire :

$$\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1\times 2}{2} = 1.$$

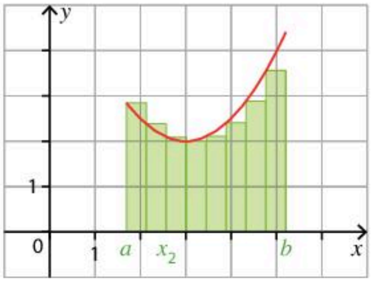


Propriété : relation de Chasles

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit c un réel appartenant $[a\,;b]$.
On a $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.



2. Méthode des rectangles



La méthode des rectangles permet le calcul approché d'une intégrale.
Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et n un entier naturel non nul.

On construit n rectangles de largeur $\dfrac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(x_i)$, où $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ avec $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, comme sur la figure ci-contre (avec $n = 8$). L'aire, en u.a., de chaque rectangle est $f(x_i)\times\dfrac{b-a}{n}$.
Pour n « assez grand », on a :

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right)\times\frac{b-a}{n}.$$

Remarque

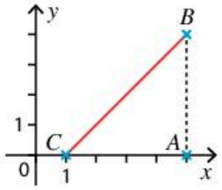
- Le symbole $\int$ utilisé ressemble à un « S ». Il vient de la somme des aires de tous les rectangles. Cette somme tend vers la valeur exacte de l'intégrale lorsque le nombre de rectangles n tend vers $+\infty$.

Méthode 1 Calculer des intégrales simples

Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale donnée en s'appuyant sur une représentation graphique.

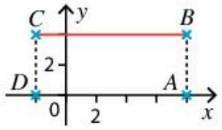
1 $\int_1^5 (x-1)\mathrm{d}x$ **2** $\int_{-2}^8 4\mathrm{d}x$

Solution commentée



1 Soit f la fonction définie sur $[1\,;5]$ par $f(x)=x-1$.
Si $1 \leqslant x \leqslant 5$, alors $x-1 \geqslant 0$ donc f est bien une fonction positive sur $[1\,;5]$.
$\int_1^5 (x-1)\mathrm{d}x$ est donc l'aire sous la courbe représentative de f entre 1 et 5 en unité d'aire.
Pour calculer cette aire, on calcule l'aire du triangle rectangle ABC.
$AC = 4$ et, comme B est le point de la courbe représentative de f d'abscisse 5, $B(5\,;f(5))$ donc $AB = f(5) = 5-1 = 4$. L'aire du triangle ABC est donc égale à :

$$\frac{AC \times AB}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8 \text{ u.a., donc } \int_1^5 (x-1)\mathrm{d}x = 8.$$



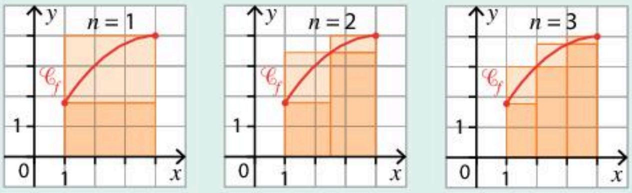
2 La fonction g définie sur $[-2\,;8]$ par $g(x)=4$ est positive, donc $\int_{-2}^8 4\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe représentative de g entre -2 et 8.
Cette aire est l'aire du rectangle $ABCD$, elle est donc égale à :

$$10 \times 4 = 40 \text{ u.a., donc } \int_{-2}^8 4\mathrm{d}x = 40.$$

Méthode 2 Utiliser la méthode des rectangles pour encadrer une intégrale

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Soit la fonction f définie sur $[1\,;4]$ par $f(x) = -0{,}25x(x-8)$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
On note $\mathscr{A}$ l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, $\mathscr{C}_f$, la droite d'équation $x=1$ et la droite d'équation $x=4$ exprimée en unité d'aire.

1 À l'aide des rectangles représentés, donner un encadrement de $\mathscr{A}$ correspondant à chaque situation ci-dessous. La valeur de n correspond au nombre de rectangles en dessous et au-dessus de la courbe qui ont tous pour largeur $\frac{3}{n}$.



2 Écrire une fonction Python qui prend comme argument le nombre de rectangles en dessous et au-dessus de la courbe et qui retourne l'encadrement de $\mathscr{A}$ correspondant.

Solution commentée

1 Pour $n=1$: $3 \times f(1) \leqslant \mathscr{A} \leqslant 3 \times f(4)$, donc $5{,}25 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 12$.
Pour $n=2$: $\frac{3}{2} \times (f(1)+f(1{,}5)) \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{3}{2} \times (f(1{,}5)+f(4))$, donc $7{,}78125 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 11{,}15625$.
Pour $n=3$: $\frac{3}{3} \times (f(1)+f(2)+f(3)) \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{3}{3} \times (f(2)+f(3)+f(4))$, donc $8{,}5 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 10{,}75$.

2

```python
def rectangles(n):
    Ainf=0
    Asup=0
    for i in range(n):
        Ainf=Ainf+(3/n)*(-0.25)*(1+i*3/n)*(1+i*3/n-8)
        Asup=Asup+(3/n)*(-0.25)*(1+(i+1)*3/n)*(1+(i+1)*3/n-8)
    return Ainf,Asup
```

2. Intégrale d'une fonction continue

1. Théorème fondamental

Théorème (admis)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
Soit F la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
La fonction F est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée la fonction f.

Remarque

Ce théorème justifie, dans le cas d'une fonction continue et positive, l'existence de primitives.

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$.
Ce nombre peut aussi se noter $[F(t)]_a^b$.

DÉMONSTRATION

Si f est une fonction continue et positive, alors la fonction G définie sur $[a\,;b]$ par $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a\,;b]$. Il existe donc $k\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in[a\,;b]$, $G(x)=F(x)+k$.
De plus, $G(a)=0$, donc $0=F(a)+k$, donc $k=-F(a)$.
On a donc $G(x)=F(x)-F(a)$, soit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b)=F(b)-F(a)$.

Remarques

- Ce théorème permet de calculer l'aire sous la courbe d'une fonction f continue et positive grâce à une primitive de f.
- Le réel $F(b)-F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie pour f : si G est une autre primitive de f, alors $G=F+k$ donc $G(b)-G(a)=F(b)+k-F(b)-k=F(b)-F(a)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[1\,;3]$ par $f(x)=x^2$. On note $\mathcal{A}$ l'aire sous la courbe de f sur $[1\,;3]$.
On a alors $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$. On a donc $\mathcal{A}=\frac{26}{3}$ u.a.

2. Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels appartenant à I.
Soit F une primitive de f sur I.
On définit l'intégrale de a à b de f par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.
On la note aussi $[F(x)]_a^b$.

Remarques

- La définition généralise l'intégrale d'une fonction continue strictement positive au cas d'une fonction continue de signe quelconque. En particulier **la relation de Chasles** s'applique également à ces intégrales.
- L'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque est un réel qui peut être positif ou négatif.
- La fonction F définie par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule pour $x=a$.

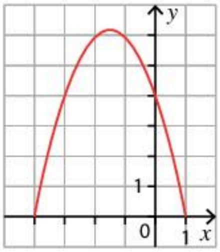
Méthode 1 Calculer l'aire sous la courbe d'une fonction positive

Soit f la fonction définie sur $[-4\ ;1]$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

1. Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé d'unités 1 cm.
2. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[-4\ ;1]$.
3. Calculer l'aire sous la courbe de f entre –4 et 1.

Solution commentée

1. Voir figure ci-contre.



2. f est une fonction polynôme du second degré. Pour étudier son signe, on calcule son discriminant. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 25$, donc f a deux racines distinctes : $\frac{3+5}{-2} = -4$ et $\frac{3-5}{-2} = 1$. Ainsi, comme le coefficient du terme en x^2 est négatif, $f(x)$ est positif entre ses deux racines, donc sur $[-4\ ;1]$.

3. Comme f est une fonction continue et positive sur $[-4\ ;1]$, l'aire sous la courbe de f entre –4 et 1 est égale à $\int_{-4}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ en u.a.
Or on peut déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$: $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 4x$.
On peut donc calculer cette intégrale à l'aide de cette primitive :
$$\int_{-4}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{1}\left(-x^2 - 3x + 4\right)\mathrm{d}x = F(1) - F(-4) = \left[-\frac{1}{3}x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{1}$$
$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{3}\times(-4)^3 - 3\frac{(-4)^2}{2} + 4(-4)\right) = \left(-\frac{2}{6} - \frac{9}{6} + \frac{24}{6}\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) = \frac{13}{6} - \frac{-56}{3} = \frac{125}{6}.$$
L'aire cherchée est donc égale à $\frac{125}{6}$ u.a. Or 1 u.a. = 1 cm², donc l'aire cherchée est égale à $\frac{125}{6}$ cm².

Méthode 2 Calculer une intégrale en utilisant une primitive

Calculer l'intégrale $\int_{-4}^{3}\left(x^3 - x\right)\mathrm{d}x$.

Solution commentée

$$\int_{-4}^{3}\left(x^3 - x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{3} = \frac{81}{4} - \frac{9}{2} - (64 - 8) = \frac{81}{4} - \frac{18}{4} - \frac{224}{4} = -\frac{161}{4}$$

Méthode 3 Calculer une intégrale en utilisant la relation de Chasles

1. Calculer l'intégrale $\int_{1}^{2}\left(4 - x^2\right)\mathrm{d}x$.
2. Calculer l'intégrale $\int_{2}^{5}\left(x^2 - 4\right)\mathrm{d}x$.
3. En déduire $\int_{1}^{5}\left|x^2 - 4\right|\mathrm{d}x$.

Solution commentée

1. $\int_{1}^{2}\left(4 - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{2} = 4\times2 - \frac{1}{3}\times2^3 - 4\times1 + \frac{1}{3}\times1^3 = \frac{5}{3}$

2. $\int_{2}^{5}\left(x^2 - 4\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{2}^{5} = \frac{1}{3}\times5^3 - 4\times5 - \frac{1}{3}\times2^3 + 4\times2 = 27$

3. Sur $[1\ ;2]$ on a $x^2 - 4 \leqslant 0$ et sur $[2\ ;5]$ on a $x^2 - 4 \geqslant 0$.
De plus, d'après la relation de Chasles, $\int_{1}^{5}\left|x^2 - 4\right|\mathrm{d}x = \int_{1}^{2}\left|x^2 - 4\right|\mathrm{d}x + \int_{2}^{5}\left|x^2 - 4\right|\mathrm{d}x$.
On a donc $\int_{1}^{5}\left|x^2 - 4\right|\mathrm{d}x = \int_{1}^{2}\left(4 - x^2\right)\mathrm{d}x + \int_{2}^{5}\left(x^2 - 4\right)\mathrm{d}x = \frac{5}{3} + 27 = \frac{86}{3}$.

3. Applications du calcul d'intégrales

1. Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$** le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

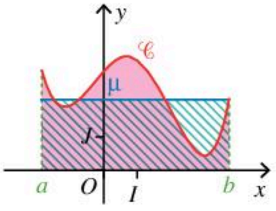
Exemple

La valeur moyenne de la fonction cube sur [0 ; 10] est :

$$\mu = \frac{1}{10}\int_0^{10} x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\left(\frac{10^4}{4} - 0\right) = 250.$$

Approche graphique

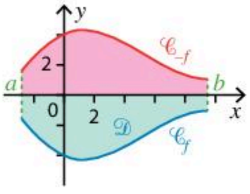
Si f est une fonction positive, en notant μ la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$, on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$.
L'aire sous la courbe de la fonction f (en rouge) est donc égale à l'aire du rectangle de largeur $b-a$ et de hauteur μ (en bleu), c'est-à-dire à l'aire sous la courbe de la fonction constante de valeur μ.



2. Calcul d'aire

Propriété (admise)

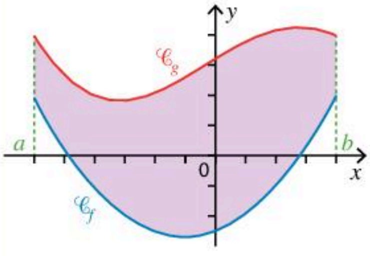
Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est égale à $\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x$.



Propriété (admise)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$. Soient $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire, est égale à :

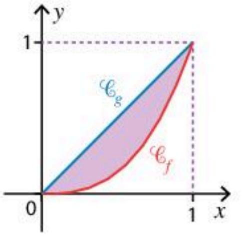
$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$



Exemple

Soient f et g les deux fonctions définies sur [0 ; 1] par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x$.
On a bien $f \leqslant g$ sur [0 ; 1].
L'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$, en unité d'aire, est donnée par :

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x - x^3\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$



Méthode 1 Calculer une valeur moyenne d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x$.

• Déterminer sa valeur moyenne μ sur l'intervalle [0 ; 6].

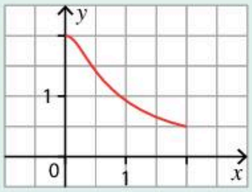
Solution commentée

$$\mu = \frac{1}{6-0}\int_0^6 \left(-x^2+6x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^6 = \frac{1}{6}\left(-\frac{6^3}{3}+3\times 6^2-\left(\frac{0^3}{3}+3\times 0^2\right)\right) = 6$$

Méthode 2 Estimer graphiquement une valeur moyenne

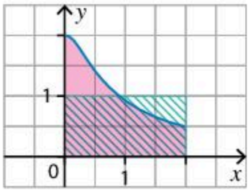
On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.

• Estimer graphiquement la valeur moyenne de f sur [0 ; 2].



Solution commentée

On estime graphiquement l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.
On trouve environ 8 carreaux de côtés 0,25 unité d'aire.
Cette aire vaut donc approximativement $8 \times 0{,}25 = 2$ u.a.
On trace un rectangle de longueur 2 sur l'axe des abscisses et de même aire que l'aire estimée précédemment. On obtient alors un rectangle de largeur 1 unité sur l'axe des ordonnées.

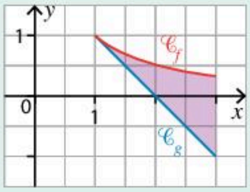


Le rectangle dont l'aire est égale à celle du domaine sous la courbe a donc pour dimension 2 unités sur l'axe des abscisses et 1 unité sur l'axe des ordonnées. La valeur moyenne de la fonction f sur [0 ; 2] est donc environ 1.

Méthode 3 Calculer une aire

On considère les fonctions f et g définies sur [1 ; 3] par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2 - x$, représentées ci-contre dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ sur [1 ; 3].
2. En déduire l'aire du domaine délimité par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.



Solution commentée

1. Pour tout réel x de [1 ; 3], $f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - (2-x) = \frac{1-2x+x^2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$.
Pour tout réel $x \in [1\,;3]$, $(x-1)^2 \geqslant 0$ et $x > 0$ donc, pour tout réel x de [1 ; 3], $f(x) - g(x) \geqslant 0$.

2. L'aire cherchée vaut donc, en u.a. :
$$\int_1^3 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^3\left(\frac{1}{x}-2+x\right)\mathrm{d}x = \left[\ln(x)-2x+\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \ln(3)-6+\frac{9}{2}-\left(\ln(1)-2+\frac{1}{2}\right) = \ln(3)$$
Comme 1 u.a. = 1 cm, l'aire cherchée est de $\ln(3)$ cm^2.