MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 5

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Connaître le cours

1. Fonctions cosinus et sinus

1. Définitions

Définitions

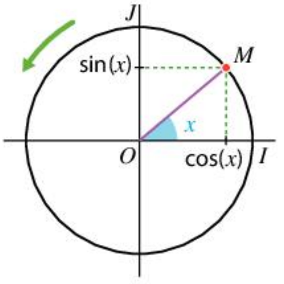
Soit M le point-image d'un réel x sur le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct $(O\ ;\ I,\ J)$. On a ainsi $M(\cos(x)\ ;\ \sin(x))$.

- La fonction **cosinus**, notée cos, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\cos : x \mapsto \cos(x).$$

- La fonction **sinus**, notée sin, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\sin : x \mapsto \sin(x).$$



Remarque

Pour tout réel x :

- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

2. Dérivabilité

Propriétés (admises)

- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $-\sin : x \mapsto -\sin(x)$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $\cos : x \mapsto \cos(x)$.

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto x - 3\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 1 + 3\sin(x)$.
- La fonction $g : x \mapsto \sin(x) + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $g' : x \mapsto g'(x) = \cos(x)$.

Propriétés

Soient a et b deux nombres réels.

- La fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction :

$$x \mapsto -a\sin(ax+b)$$

- La fonction $x \mapsto \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction :

$$x \mapsto a\cos(ax+b)$$

Propriétés

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $-u' \times (\sin(u))$.
- La fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $u' \times (\cos(u))$.

3. Limites

Propriétés

- Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $-\infty$ et en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$

Méthode 1 Calculer des dérivées de fonctions trigonométriques

Calculer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1. f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(x) - \sin(x) + 3x$.
2. g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2\cos(x) + 3$.

Solution commentée

1. En dérivant une somme de trois fonctions, on obtient : $f'(x) = -3\sin(x) - \cos(x) + 3$.
2. À l'aide de la formule de dérivation d'un produit, on obtient : $g'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$.

Méthode 2 Calculer des dérivées de fonctions composées

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3\cos\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right)$. Calculer $h'(x)$.

Solution commentée

1. $h(x)$ est de la forme $3\cos(ax + b)$, avec $a = 2$ et $b = -\frac{2\pi}{5}$.
Ainsi, $h'(x) = 3 \times 2 \times \left(-\sin\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right)\right)$.
Donc $h'(x) = -6\sin\left(2x - \frac{2\pi}{5}\right)$.

Méthode 3 Déterminer des limites

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Avec la calculatrice, réaliser un tableau de valeurs de $f(x)$ sur $[0{,}01\,;0{,}1]$ avec un pas de 0,01, puis sur $[0{,}001\,;0{,}01]$ avec un pas de 0,001. Vers quelle valeur semble tendre $f(x)$ quand x tend vers 0 ?
3. En utilisant $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, déterminer la limite de f en 0.

Solution commentée

1. Pour tout $x > 0$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^2(x) \leqslant 1$. Ainsi, $0 \leqslant \frac{\sin^2(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$, car on divise par $x > 0$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. On obtient les tableaux de valeurs suivants.

- Pas de 0,01 :

x	f(x)
0.01	0.009999667
0.02	0.01999733
0.03	0.029991
0.04	0.03997867
0.05	0.04995835
0.06	0.05992803
0.07	0.06988574

- Pas de 0,001 :

x	f(x)
0.001	0.0009999997
0.002	0.001999997
0.003	0.002999991
0.004	0.003999979
0.005	0.004999958
0.006	0.005999928
0.007	0.006999886

$f(x)$ semble tendre vers 0 quand x tend vers 0.

3. $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x} = \sin(x) \times \frac{\sin(x)}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, donc, par produit, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

2. Variations des fonctions trigonométriques

1. Variations des fonctions trigonométriques

Propriété

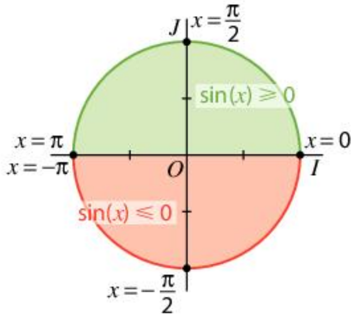
Les tableaux de variation des fonctions cosinus et sinus sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ sont les suivants.

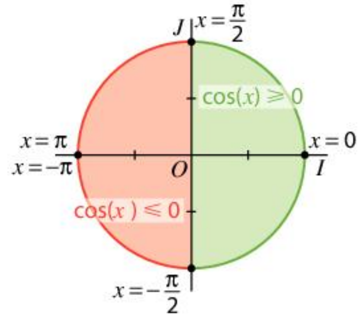
x	$-\pi$		0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$\cos(x)$	-1	↗	1	↘	-1

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Remarque

Le signe des dérivées des fonctions trigonométriques s'obtient par lecture sur le cercle trigonométrique :





2. Courbes représentatives des fonctions trigonométriques

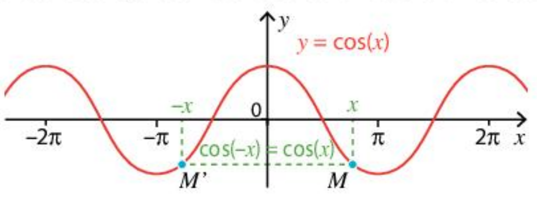
Propriétés

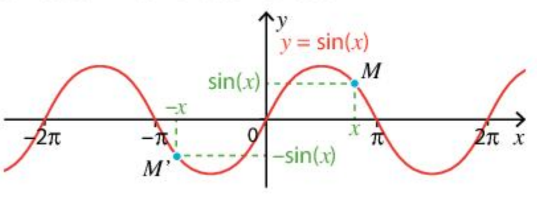
Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est paire. Sa représentation graphique admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. La fonction cosinus est périodique de période 2π. La courbe se répète sur des intervalles de longueur 2π.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$. La fonction sinus est impaire. Sa représentation graphique admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. La fonction sinus est périodique de période 2π. La courbe se répète sur des intervalles de longueur 2π.

Remarque

La périodicité des fonctions cosinus et sinus permet d'étendre l'étude de leurs variations à $\mathbb{R}$.
Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$ sont les suivantes.





Méthode 1 Étudier la parité et la périodicité d'une fonction trigonométri

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

1. Donner la valeur exacte de $f\left(-\frac{65\pi}{6}\right)$.
2. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
3. La fonction f est-elle de période 2π ? Est-elle de période π ?

Solution commentée

1. $f\left(-\frac{65\pi}{6}\right) = f\left(-\frac{60\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right) = f\left(-10\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = f\left(-\frac{5\pi}{6} - 5 \times 2\pi\right) = f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$, car les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.
Or, $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$. Donc $f\left(-\frac{65\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$.

2. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc la fonction f n'est pas paire.
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc la fonction f n'est pas impaire.

3. • Pour tout réel x, $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + \sin(x+2\pi) = \cos(x) + \sin(x)$, car les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π. Donc $f(x+2\pi) = f(x)$. La fonction f est périodique de période 2π.
• $f(0) = \cos(0) + \sin(0) = 1$ et $f(0+\pi) = \cos(\pi) + \sin(\pi) = -1$; donc $f(0) \neq f(0+\pi)$.
La fonction f n'est donc pas périodique de période π.

Méthode 2 Étudier les variations d'une fonction trigonométrique

Soit t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = 1 + \cos(2x)$.

1. Justifier que t est paire et de période π.
2. Dresser le tableau de variation de t sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. En déduire, à l'aide de la question 1, le tableau de variation de t sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

Solution commentée

1. Pour tout x réel, $\cos(-2x) = \cos(2x)$, car la fonction cosinus est paire. Donc t est paire.
Pour tout x réel, $\cos(2(x+\pi)) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x)$, car la fonction cosinus est périodique de période 2π.
On a donc $t(x+\pi) = t(x)$. t est périodique de période π.

2. t est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :
$$t'(x) = -2\sin(2x).$$
Pour tout x de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $2x \in [0\ ;\ \pi]$,
donc $\sin(2x) \geqslant 0$, donc $-2\sin(2x) \leqslant 0$.
Comme $t(0) = 2$ et $t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on obtient ainsi le tableau ci-dessous.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$t'(x)$	0	$-$	
$t(x)$	2	$\searrow$	0

3. Compte tenu de la parité et de la périodicité de t, on peut compléter le tableau précédent par symétrie axiale (parité) puis par translation (périodicité).
Le tableau de variation de t sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ est donc le suivant.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$t(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

3. Équations et inéquations sur $[-\pi ; \pi]$ avec le cosinus

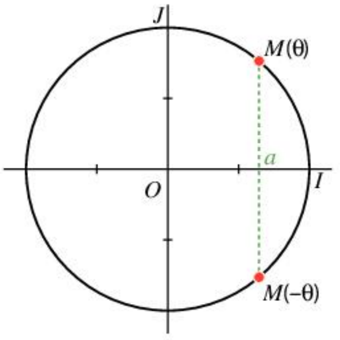
1. Résolution de l'équation $\cos(x) = a$ sur $[-\pi ; \pi]$

Propriété

Soit a un nombre réel.
On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = a$ sur $[-\pi ; \pi]$.

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, alors $\mathscr{S} = \varnothing$.
- Si $a = 1$, alors $\mathscr{S} = \{0\}$.
- Si $a = -1$, alors $\mathscr{S} = \{-\pi ; \pi\}$.
- Si $-1 < a < 1$, alors $\mathscr{S} = \{-\theta ; \theta\}$,

avec $\theta \in]-\pi ; \pi[$ tel que $\cos(\theta) = a$.



Exemple

L'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ admet deux solutions sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ qui sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$, car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Remarques

- Pour trouver la valeur de θ appartenant à $[-\pi ; \pi]$ lorsque $\cos(\theta)$ n'est pas une valeur remarquable, on utilise la calculatrice (réglée en mode radian).

Sur Casio, on utilise les instructions : SHIFT cos, sur TI : trig 5:cos⁻¹ et sur NumWorks : shift acos H cos.
Par exemple si $\cos(\theta) = 0{,}3$, on obtient $\theta \approx 1{,}27$.

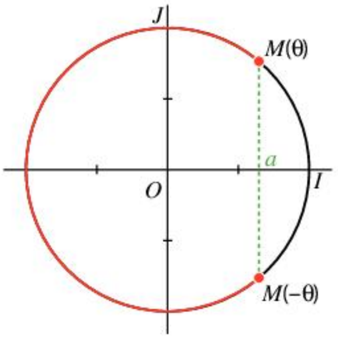
- On peut aussi résoudre ces équations en utilisant la représentation graphique de la fonction cosinus.

2. Résolution de l'inéquation $\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi ; \pi]$

Propriété

Soit a un nombre réel.
On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi ; \pi]$.

- Si $a < -1$, alors $\mathscr{S} = \varnothing$.
- Si $a \geqslant 1$, alors $\mathscr{S} = [-\pi ; \pi]$.
- Si $a = -1$, alors $\mathscr{S} = \{-\pi ; \pi\}$.
- Si $-1 < a < 1$, alors $\mathscr{S} = [-\pi ; -\theta] \cup [\theta ; \pi]$,
  avec $\theta \in]-\pi ; \pi[$ tel que $\cos(\theta) = a$.



Exemple

L'inéquation $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$ admet pour ensemble des solutions $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$.

Remarque

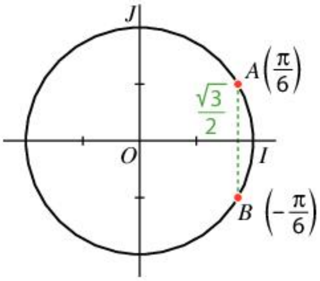
On peut aussi résoudre ces inéquations en utilisant la représentation graphique de la fonction cosinus.

Méthode 1 Résoudre une équation trigonométrique

1. Résoudre, sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$, l'équation $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On s'aidera du cercle trigonométrique.
2. Résoudre, sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right]$, l'équation $\cos(3x) = -\dfrac{1}{2}$.
   On posera $X = 3x$ et on s'aidera du cercle trigonométrique.

Solution commentée

1. Sur le cercle trigonométrique, les points A et B sont les points-images des deux solutions de l'équation.
   Donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{\pi}{6}\right\}$.



2. On pose $X = 3x$.

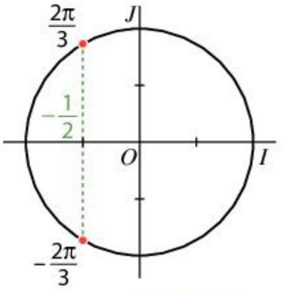
$x \in \left[-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\pi \leqslant 3x \leqslant \pi \Leftrightarrow X \in [-\pi\ ;\ \pi]$.

$\cos(3x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(X) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow X = -\dfrac{2\pi}{3}$ ou $X = \dfrac{2\pi}{3}$ (voir cercle ci-contre)

$\Leftrightarrow 3x = -\dfrac{2\pi}{3}$ ou $3x = \dfrac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{2\pi}{9}$ ou $x = \dfrac{2\pi}{9}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{2\pi}{9}\ ;\ \dfrac{2\pi}{9}\right\}$.

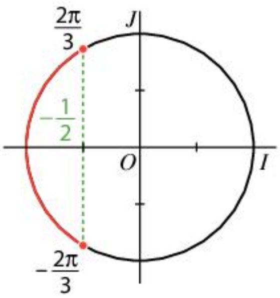


Méthode 2 Résoudre une inéquation trigonométrique

1. Résoudre, sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$, l'inéquation $\cos(x) + 3 \leqslant 2{,}5$. On s'aidera du cercle trigonométrique.
2. Résoudre, sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, l'inéquation $\cos(4x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   On posera $X = 4x$ et on s'aidera du cercle trigonométrique.

Solution commentée

1. $\cos(x) + 3 \leqslant 2{,}5 \Leftrightarrow \cos(x) \leqslant 2{,}5 - 3 \Leftrightarrow \cos(x) \leqslant -0{,}5$.
   Cette dernière inéquation admet pour ensemble des solutions :
$$\mathcal{S} = \left[-\pi\ ;\ -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$$



2. On pose $X = 4x$.

$x \in \left[-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\pi \leqslant 4x \leqslant \pi \Leftrightarrow X \in [-\pi\ ;\ \pi]$.

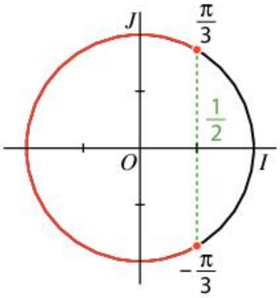
$\cos(4x) \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(X) \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow X \in \left[-\pi\ ;\ -\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3} ; \pi\right]$ (voir cercle ci-contre)

$\Leftrightarrow -\pi \leqslant X \leqslant -\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{\pi}{3} \leqslant X \leqslant \pi$

$\Leftrightarrow -\pi \leqslant 4x \leqslant -\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{\pi}{3} \leqslant 4x \leqslant \pi$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant -\dfrac{\pi}{12}$ ou $\dfrac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

Donc $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ -\dfrac{\pi}{12}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{12}\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.



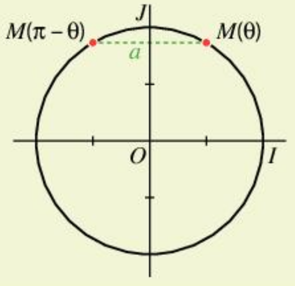
4. Équations et inéquations sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ avec le sinus

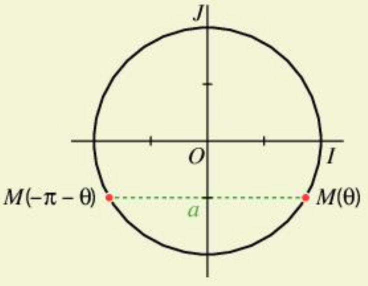
1. Résolution de l'équation $\sin(x) = a$ sur $[-\pi\ ;\ \pi]$

Propriété

Soit a un nombre réel. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) = a$ sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, alors $\mathcal{S} = \varnothing$.
- Si $a = -1$, alors $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.
- Si $0 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = \{\pi - \theta\ ;\ \theta\}$, avec $\theta \in\ ]0\ ;\ \pi[$ tel que $\sin(\theta) = a$.
- Si $a = 1$, alors $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- Si $a = 0$, alors $\mathcal{S} = \{-\pi\ ;\ 0\}$.
- Si $-1 < a < 0$, alors $\mathcal{S} = \{-\pi - \theta\ ;\ \theta\}$ avec $\theta \in\ ]-\pi\ ;\ 0[$ tel que $\sin(\theta) = a$.





Exemple

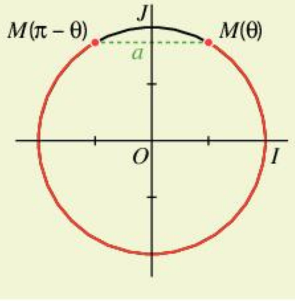
$\sin(x) = \frac{1}{2}$ admet deux solutions sur $[-\pi\ ;\ \pi]$: $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$, car $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

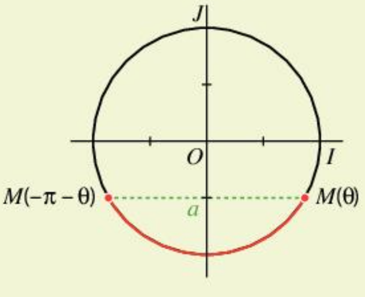
2. Résolution de l'inéquation $\sin(x) \leqslant a$ sur $[-\pi\ ;\ \pi]$

Propriété

Soit a un nombre réel. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin(x) \leqslant a$ sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

- Si $a < -1$, alors $\mathcal{S} = \varnothing$.
- Si $a = -1$, alors $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.
- Si $0 < a < 1$, alors $\mathcal{S} = [-\pi\ ;\ \theta] \cup [\pi - \theta\ ;\ \pi]$, avec $\theta \in\ ]-\pi\ ;\ \pi[$ le réel tel que $\sin(\theta) = a$.
- Si $a \geqslant 1$, alors $\mathcal{S} = [-\pi\ ;\ \pi]$.
- Si $a = 0$, alors $\mathcal{S} = [-\pi\ ;\ 0]$.
- Si $-1 < a < 0$, alors $\mathcal{S} = [-\pi - \theta\ ;\ \theta]$, avec $\theta \in\ ]-\pi\ ;\ 0[$ le réel tel que $\sin(\theta) = a$.





Exemple

On a $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. L'inéquation $\sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$ admet pour ensemble des solutions $\left[-\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$.

Remarque

On peut aussi résoudre ces équations et inéquations en utilisant la représentation graphique de la fonction sinus.

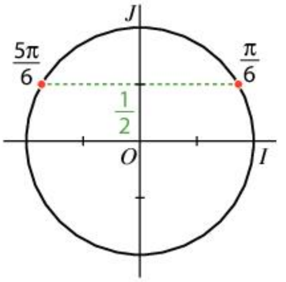
Méthode 1 Résoudre une équation trigonométrique

1. Résoudre, sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$, l'équation $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$.
2. Résoudre, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$, l'équation $\sin(3x)=\frac{1}{2}$.
   On posera $X=3x$ et on s'aidera du cercle trigonométrique.

Solution commentée

1. $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$ si $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$, donc si $x=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$.
   Donc $\mathscr{S}=\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$.

2. On pose $X=3x$.
   $x\in\left[-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right]\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow-\pi\leqslant 3x\leqslant\pi\Leftrightarrow X\in[-\pi\,;\,\pi]$
   $\sin(3x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin(X)=\frac{1}{2}$
   $\Leftrightarrow X=\frac{\pi}{6}$ ou $X=\frac{5\pi}{6}$ (voir cercle ci-contre)
   $\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{6}$ ou $3x=\frac{5\pi}{6}$
   Cela équivaut à $x=\frac{\pi}{18}$ ou $x=\frac{5\pi}{18}$.
   Donc $\mathscr{S}=\left\{\frac{\pi}{18}\,;\,\frac{5\pi}{18}\right\}$



Méthode 2 Résoudre une inéquation trigonométrique

1. Résoudre sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ l'inéquation $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant-1$.
2. Résoudre sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\sin(2x)\leqslant\frac{1}{2}$.
   On posera $X=2x$ et on s'aidera du cercle trigonométrique.

Solution commentée

1. $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant-1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$
   Donc $\mathscr{S}=\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$.

2. On pose $X=2x$.
   $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\pi\leqslant 2x\leqslant\pi\Leftrightarrow X\in[-\pi\,;\,\pi]$
   $\sin(2x)\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin(X)\leqslant\frac{1}{2}$
   $\Leftrightarrow X\in\left[-\pi\,;\,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}\,;\,\pi\right]$ (voir cercle ci-contre)
   $\Leftrightarrow-\pi\leqslant X\leqslant\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}\leqslant X\leqslant\pi$
   $\Leftrightarrow-\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}\leqslant 2x\leqslant\pi$
   $\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}$ ou $\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$
   Donc $\mathscr{S}=\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{12}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.