MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 6

Connaître le cours

1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels {0 ; 1 ; 2 ; …} ; $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs $\{\ldots;-1;-2;0;1;2\ldots\}$.

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$. On dit que b divise a, ou que b est un diviseur de a s'il existe un entier relatif k tel que $a = bk$. On dit aussi que a est un multiple de b.

Remarque

0 est un multiple de n'importe quel entier relatif b $(0 = b \times 0)$. En revanche, 0 n'est un diviseur d'aucun nombre.

Exemple

4 divise 24 car $24 = 4 \times 6$; –4 divise aussi 24 car $24 = (-4) \times (-6)$; 24 est un multiple de 4 et –4.

DÉMO en ligne

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$, on a les implications suivantes :

- Si b divise a alors les multiples de a sont des multiples de b.
- Si b divise a alors les diviseurs de b sont des diviseurs de a.

Remarque

L'ensemble des multiples d'un entier relatif b dans $\mathbb{Z}$ est noté $b\mathbb{Z}$ et l'ensemble des diviseurs de b est noté $D(b)$. D'après la propriété, si $b \neq 0$ divise a alors $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$ et $D(b) \subset D(a)$.

Exemples

Les multiples de 24 sont aussi des multiples de 3 : $24\mathbb{Z} \subset 3\mathbb{Z}$.
Les diviseurs de 12 sont des diviseurs de 24 : $D(12) = \{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$
$D(24) = \{-24;-12;-8;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;8;12;24\}$; $D(12) \subset D(24)$.

DÉMO en ligne

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$.
b divise $a \Leftrightarrow -b$ divise $a \Leftrightarrow b$ divise $-a \Leftrightarrow -b$ divise $-a$.

Conséquence

a et $-a$ ont les mêmes diviseurs dans $\mathbb{Z}$. Les diviseurs de $-a$ étant les opposés des diviseurs positifs de a on restreindra souvent l'étude à la divisibilité dans $\mathbb{N}$.

DÉMO p. 123

Propriété

Tout entier relatif non nul n possède un nombre fini de diviseurs compris entre $-n$ et n.

Remarque

Le nombre de multiples d'un entier normal est infini.

DÉMO en ligne

Propriétés

1. Soient a, b et c des entiers relatifs avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Si a divise b et b divise c alors a divise c.
2. Soient a, b et c des entiers relatifs avec $a \neq 0$. Si a divise b et c, alors a divise tout entier de la forme $bu + cv$ où u et v sont des entiers relatifs. $bu + cv$ est appelé combinaison linéaire de b et c.

Exemple

Si a divise deux entiers consécutifs n et $n+1$ alors a divise $n + 1 - n = 1$ donc a est égal à 1 ou –1.

Exercice résolu 1 Caractériser la divisibilité

1. Montrer que $14p^2 - 35q$ est divisible par 7 quels que soient les entiers relatifs p et q.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que 4 divise $n + 13$.

Solution commentée

1. Il faut montrer qu'il existe un entier k tel que $14p^2 - 35q = 7k$. Pour cela, on peut factoriser l'expression par 7 : $14p^2 - 35q = 7(2p^2 - 5q)$; p et q étant des entiers relatifs, $2p^2 - 5q$ aussi. Donc $14p^2 - 35q$ est bien divisible par 7.

2. Si 4 divise $n+13$ alors il existe un entier naturel k tel que $n+13 = 4k$ d'où $n = 4k - 13$. n étant un entier naturel on doit avoir $4k - 13 \geqslant 0$ d'où $k \geqslant \dfrac{13}{4}$. Les entiers naturels n tels que 4 divise $n + 13$ sont donc les entiers de la forme $4k - 13$ avec $k \geqslant 4$. C'est l'ensemble $\{3;7;11;\ldots\}$.

Exercice résolu 2 Utiliser un raisonnement par l'absurde

Montrer que, quelque soit l'entier relatif n, $2n + 5$ est jamais divisible par 2.

Solution commentée

On suppose que $2n + 5$ est divisible par 2. Il existe alors un entier relatif k tel que $2n + 5 = 2k$.
On a donc $5 = 2(k - n)$ ce qui est impossible car 5 n'est pas un multiple de 2. Donc 2 ne divise pas $2n + 5$.

Exercice résolu 3 Déterminer et utiliser la liste des diviseurs d'un nombre

Déterminer dans $\mathbb{Z}$ la liste des diviseurs de 7 et en déduire les entiers relatifs n tes que $4n + 1$ divise 7.

Solution commentée

$D(7) = \{-7;-1;1;7\}$. Si $4n + 1$ divise 7 alors $4n + 1$ est égal à un des diviseurs de 7.
$4n+1 = -7 \Leftrightarrow 4n = -8 \Leftrightarrow n = -2$; $4n+1 = -1 \Leftrightarrow 4n = -2$ pas de solution dans $\mathbb{Z}$;
$4n+1 = 1 \Leftrightarrow 4n = 0 \Leftrightarrow n = 0$; $4n+1 = 7 \Leftrightarrow 4n = 6$ pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
Les solutions sont donc 0 et -2.

Exercice résolu 4 Utiliser une combinaison linéaire

Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n + 1$ divise $n + 13$.

Solution commentée

On cherche à écrire une combinaison linéaire de $2n + 1$ et $n + 13$ indépendante de n.
$(2n+1) - 2(n+13) = -25$ donc si $2n + 1$ divise $n + 13$ alors $2n + 1$ divise -25.
$D(-25) = \{-25;-5;-1;1;5;25\}$. On en déduit : $2n+1 = -25$ ou $2n+1 = -5$ ou
$2n+1 = -1$ ou $2n+1 = 1$ ou $2n+1 = 5$ ou $2n+1 = 25$ soit : $n = -13$ ou $n = -3$ ou $n = -1$ ou $n = 0$ ou $n = 2$ ou $n = 12$.
Réciproquement, si $n = -13$ alors $2n+1 = -25$; $n+13 = 0$ et -25 divise bien 0.
On vérifie de même les cinq autres valeurs trouvées pour n.
On conclut que les solutions sont les entiers -13, -3, -1, 0, 2 et 12.

2. Division euclidienne

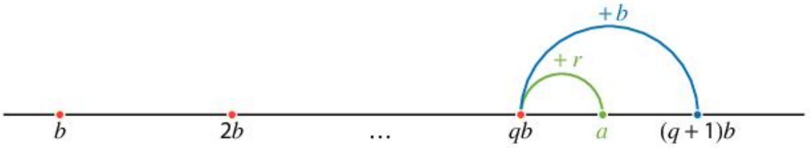
Théorème

DÉMO p. 122

Soient a un entier relatif et b un entier naturel non nul.
Il existe un unique couple d'entiers relatifs $(q\,;r)$ tel que $a=bq+r$ et $0\leqslant r<b$.
q est le quotient et r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Interprétation graphique

On encadre a par deux multiples consécutifs de b.



Exemple

La division euclidienne de 114 par 8 est $114=8\times14+2$: $q=14$ et $r=2$ avec $0\leqslant2<8$.

Remarques

- Dans la division euclidienne par b, il y a b restes possibles qui sont 0, 1, 2, …, $b-1$.
- Il existe plusieurs écritures de la forme $a=bq+r$ mais une seule correspond à la division euclidienne, celle vérifiant $0\leqslant r<b$.

Par exemple : $56=17\times3+5=17\times2+22$ mais $22>17$, donc cette dernière égalité n'est pas une division euclidienne.

Propriété

DÉMO en ligne

Soient a un entier relatif et b un entier naturel non nul.
b divise a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Exemple

$-36=6\times(-6)+0$ est la division euclidienne de -36 par 6 avec $q=-6$ et $r=0$.
6 est bien un diviseur de -36.

Propriété

DÉMO en ligne

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Tout entier relatif s'écrit sous l'une des formes suivantes : $bq, bq+1, bq+2, \ldots, bq+(b-1)$, où q est un entier relatif.

Exemple

On utilise la propriété précédente pour raisonner par disjonction des cas.
Pour montrer que n^2+1 (n entier relatif) n'est jamais divisible par 3, on utilise les différentes écritures possibles pour n dans la division euclidienne par 3 : $3q, 3q+1, 3q+2$ où q est un entier relatif.

$(3q)^2+1=9q^2+1\neq 3k$;
$(3q+1)^2+1=9q^2+6q+2=3\left(3q^2+2q\right)+2\neq 3k$
$(3q+2)^2+1=9q^2+12q+4+1=3\left(3q^2+4q\right)+5\neq 3k$.

Donc, quel que soit l'entier relatif n, n^2+1 n'est jamais divisible par 3.

Exercice résolu 1 Écrire une division euclidienne

1 À l'aide de la calculatrice, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 432 par 17 ; en déduire, sans calculatrice, le quotient et le reste de la division euclidienne de -432 par 17.

2 Soit n un entier naturel, déterminer suivant les valeurs de n, le quotient et le reste de la division euclidienne de $7n+5$ par $3n+1$.

Solution commentée

1 On peut déterminer le quotient et le reste de la division de 432 par 17 à l'aide de la calculatrice :
TI : math NBRE 3.ent (432/17) ; Casio : OPTN F6 NUMERIC Int (432÷17) ; NumWorks : Toolbox Arithmétique quo (432, 17) pour le quotient et TI : math NBRE 0.reste (432, 17) ; Casio : OPTN F6 NUMERIC MOD (432, 17) ; NumWorks : Toolbox Arithmétique rem (432, 17) pour le reste.
On trouve $432 = 17 \times 25 + 7$ et $0 \leqslant 7 < 17$.
Alors $-432 = -17 \times 25 - 7 = -17 \times 25 - 17 + 10 = 17 \times (-26) + 10$ et $0 \leqslant 10 < 17$ donc le quotient et le reste de la division euclidienne de -432 par 17 sont -26 et 10.

2 On écrit une égalité du type $a = bq + r$: $7n+5 = (3n+1) \times 2 + n + 3$.
On doit avoir $0 \leqslant n+3 < 3n+1$ d'où $n > 1$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$ le reste est 0 $(5 = 5 \times 1 + 0$ et $12 = 4 \times 3 + 0)$ et pour $n > 1$ le reste est $n+3$.

Exercice résolu 2 Raisonner par disjonction des cas

Montrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 3.

Solution commentée

Soit n un entier naturel. On doit montrer que $(n-1) \times n \times (n+1) = 3k$ avec k entier naturel.
L'entier n s'écrit sous une des formes $3q$, $3q+1$, $3q+2$ avec q entier naturel.
- Si $n = 3q$ alors $(n-1) \times n \times (n+1) = (3q-1)3q(3q+1) = 3((3q-1)q(3q+1))$ et $(3q-1)q(3q+1)$ est entier donc $(n-1) \times n \times (n+1)$ est divisible par 3.
- Si $n = 3q+1$ alors $(n-1) \times n \times (n+1) = (3q)(3q+1)(3q+2) = 3(q(3q+1)(3q+2))$ et $q(3q+1)(3q+2)$ est entier donc $(n-1) \times n \times (n+1)$ est divisible par 3.
- Si $n = 3q+2$ alors $(n-1) \times n \times (n+1) = (3q+1)(3q+2)(3q+3) = 3((3q+1)(3q+2)(q+1))$ et $(3q+1)(3q+2)(q+1)$ est entier, donc $(n-1) \times n \times (n+1)$ est divisible par 3.

Exercice résolu 3 Conjecturer une divisibilité

Conjecturer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles n^2-1 est divisible par 8 et démontrer cette conjecture.

Solution commentée

On calcule n^2-1 pour les premières valeurs de n ; on obtient : -1 ; 0 ; 3 ; 8 ; 15 ; 24 ; 35 ; 48…
On conjecture que n^2-1 est divisible par 8 lorsque n est impair.
Si $n = 2k$ avec k entier naturel alors $n^2 - 1 = 4k^2 - 1$ qui est impair donc pas divisible par 8.
Si $n = 2k+1$ alors $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$ or $k(k+1)$ est pair (produit de deux entiers consécutifs) donc $n^2 - 1 = 8k'$ avec k' entier naturel. La conjecture est donc démontrée.

Connaître le cours

3. Congruence dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
On dit que a est congru à b modulo n, et on note $a \equiv b\ [n]$ ou $a \equiv b(\text{mod} n)$, lorsque $a - b$ est un multiple de n.

Exemples

- $15 - 7 = 8 = 2 \times 4$ donc $15 \equiv 7\ [2]$ et $15 \equiv 7\ [4]$.
- $-5 - (-1) = -4 = -1 \times 4$ donc $-5 \equiv -1\ [4]$

Remarque

$a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow b \equiv a\ [n]$. On dit aussi que a et b sont congrus modulo n.

Propriété

DÉMO p. 123

Soient a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
$a \equiv b\ [n]$ si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

Exemple

$11 = 4 \times 2 + 3$ et $7 = 4 \times 1 + 3$ avec $0 \leqslant 3 < 4$, donc 11 et 7 sont congrus modulo 4.

Propriétés

DÉMO p. 130

Soient a, b, c des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
1. $a \equiv 0\ [n]$ si et seulement si a est divisible par n.
2. $a \equiv a\ [n]$.
3. r est le reste de la division euclidienne de a par n si et seulement si $a \equiv r\ [n]$ et $0 \leqslant r < n$.
4. Si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$ alors $a \equiv c\ [n]$.

Exemples

- $12 \equiv 0\ [2]$. On a aussi $12 \equiv 0\ [3]$ et $12 \equiv 0\ [6]$.
- $13 \equiv -5\ [2]$ et $-5 \equiv -1\ [2]$, alors $13 \equiv -1\ [2]$.

Propriétés : Calculs avec les congruences

DÉMO p. 130

Soient a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
1. Si $a \equiv b\ [n]$ alors $a + c \equiv b + c\ [n]$
2. Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors $a + c \equiv b + d\ [n]$
On dit que l'addition est compatible avec les congruences.
3. Si $a \equiv b\ [n]$ alors $ac \equiv bc\ [n]$
4. Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors $ac \equiv bd\ [n]$
On dit que la multiplication est compatible avec les congruences.
5. Si $a \equiv b\ [n]$ alors pour tout entier naturel non nul p, $a^p \equiv b^p\ [n]$

Exemples

- $x + 2 \equiv 3\ [4]$ et $-2 \equiv -2\ [4]$, alors $x + 2 - 2 \equiv 3 - 2\ [4]$, d'où $x \equiv 1\ [4]$.
- $10 \equiv 1\ [9]$, alors $10^p \equiv 1^p\ [9] \equiv 1\ [9]$ où p est un entier naturel non nul.

Remarque

La division n'est pas compatible avec les congruences. Par exemple $5 \times 4 \equiv 5 \times 6\ [10]$ mais 4 et 6 ne sont pas congrus modulo 10.

Exercice résolu 1 Résoudre des équations avec des congruences

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}$.

a. $x+3\equiv 2\ [7]$ b. $3x\equiv 2\ [5]$ c. $x^2\equiv 0\ [4]$

Solution commentée

a. $x+3\equiv 2\ [7] \Leftrightarrow x+3-3\equiv 2-3\ [7]$ par compatibilité avec l'addition.
$\Leftrightarrow x\equiv -1\ [7]$

Les solutions sont donc de la forme $7k-1$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

b. On utilise un tableau de congruences et la compatibilité avec la multiplication pour raisonner par disjonction des cas.

Si $x\equiv\ldots\ [5]$	0	1	2	3	4
alors $3x\equiv\ldots\ [5]$	0	3	1	4	2

Par exemple : si $x\equiv 2\ [5]$ alors $3x\equiv 6\ [5]$ et donc $3x\equiv 1\ [5]$.

On constate que le seul cas qui convient est $x\equiv 4\ [5]$.

Les solutions sont donc de la forme $5k+4$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

c. On raisonne là aussi par disjonction des cas :

Si $x\equiv\ldots\ [4]$	0	1	2	3
alors $x^2\equiv\ldots\ [4]$	0	1	0	1

Deux cas conviennent : $x\equiv 0\ [4]$ et $x\equiv 2\ [4]$.

Les solutions sont donc les nombres de la forme $4k$ et $4k+2$ avec k entier relatif.

Exercice résolu 2 Montrer une divisibilité à l'aide des congruences

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles n^2-3n+6 est divisible par 4.

Solution commentée

1. $2^3=8$ or $8\equiv 1\ [7]$ donc $2^3\equiv 1\ [7]$ et par compatibilité avec les puissances on a $2^{3n}\equiv 1^n\ [7]\equiv 1\ [7]$.
Alors $2^{3n}-1\equiv 0\ [7]$ par compatibilité avec l'addition.
Conclusion : $2^{3n}-1$ est bien un multiple de 7.
2. On utilise un tableau de congruences modulo 4.
Les entiers n qui conviennent sont donc de la forme $4k+1$ ou $4k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$.

Si $n\equiv\ldots\ [4]$	0	1	2	3
alors $n^2\equiv\ldots\ [4]$	0	1	0	1
et $3n\equiv\ldots\ [4]$	0	3	2	1
et donc $n^2-3n+6\equiv\ldots\ [4]$	2	0	0	2

Exercice résolu 3 Déterminer le reste d'une division euclidienne

Déterminer le reste de la division euclidienne de $11^{2\,020}$ par 3.

Solution commentée

On a $11\equiv 2\ [3]; 11^2\equiv 4\ [3]\equiv 1\ [3]$ donc, pour tout entier $q>0$, on a $11^{2q}\equiv 1^q\ [3]\equiv 1\ [3]$.

Or $2\,020=2\times 1010$ est de la forme $2q$ donc $11^{2\,020}\equiv 1\ [3]$ et $0\leqslant 1<3$.

Donc le reste de la division euclidienne de $11^{2\,020}$ par 3 est 1.