MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 6

Convexité des fonctions

Connaître le cours

1. Convexité

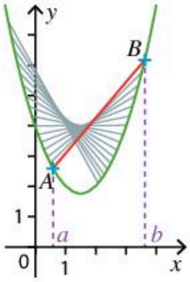
1. Fonctions convexes, fonctions concaves

Définitions

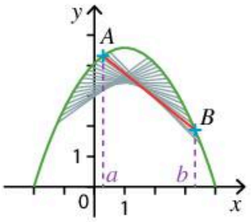
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

- f est **convexe** sur I si, pour tous réels a et b de I, en notant $A(a\,;\,f(a))$ et $B(b\,;\,f(b))$, la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ située entre A et B est **en dessous** de la sécante (AB).
- f est dite **concave** sur I si pour tous réels a et b de I, en notant $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$, la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ située entre A et B est **au-dessus** de la sécante (AB).

Exemples



La fonction f est convexe.



La fonction f est concave.

Remarques

- Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe et sur quel(s) intervalle(s) elle est concave.
- En géométrie, une surface $\mathscr{S}$ est dite convexe si, pour tous points A et B appartenant à $\mathscr{S}$, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans $\mathscr{S}$. La définition d'une fonction convexe traduit le fait que la partie du plan situé au-dessus de $\mathscr{C}_f$ (que l'on appelle l'épigraphe de $\mathscr{C}_f$) est convexe.

Exemples **Cas des fonctions de référence**

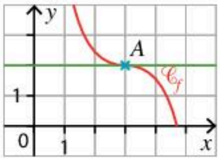
- La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.

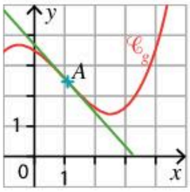
2. Point d'inflexion

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A un point de $\mathscr{C}_f$.
A est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}_f$ si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en A et si $\mathscr{C}_f$ traverse cette tangente en A.

Exemples



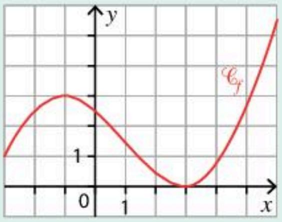


Remarque

En l'abscisse d'un point d'inflexion A de la courbe représentative de f, la fonction f change de convexité.

Méthode 1 Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 6]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



1. Déterminer graphiquement le tableau de variation de la fonction f sur $[-3 ; 6]$.
2. Déterminer graphiquement le (ou les) intervalle(s) où f est convexe et celui (ou ceux) où f est concave.

Solution commentée

1. Graphiquement, on obtient le tableau de variation ci-dessous.

x	-3		-1		3		6
Variation de f	1	↗	3	↘	0	↗	5,5

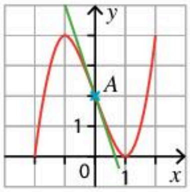
2. La fonction f semble concave sur l'intervalle $[-3 ; 1]$.
La fonction f semble convexe sur l'intervalle $[1 ; 6]$.

Méthode 2 Déterminer graphiquement l'existence d'un point d'inflexion

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère.

1. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur $[-2 ; 2]$.
2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
Tracer $\mathscr{T}_0$.
3. En déduire graphiquement l'abscisse d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Solution commentée

1. 

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 3x^2 - 3$.
On a donc $f'(0) = -3$.
Au point A d'abscisse 0, l'équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ est :
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$
La tangente $\mathscr{T}_0$ au point d'abscisse 0 est donc $y = -3x + 2$.

3. Au point A d'abscisse 0, on observe que la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse la tangente $\mathscr{T}_0$. Le point A est donc un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Connaître le cours

2. Fonctions dérivables et convexité

1. Dérivée seconde

Définition

Soient une fonction f dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
La fonction f est deux fois dérivable sur I si f' est elle-même dérivable sur I.
On note f'' la dérivée de f'. Elle est appelée **dérivée seconde de f**.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x + \mathrm{e}^x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 3x^2 + 5 + \mathrm{e}^x$.
f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $(f')'(x) = 6x + \mathrm{e}^x$.
f est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est définie par $f''(x) = 6x + \mathrm{e}^x$.

2. Convexité et tangente

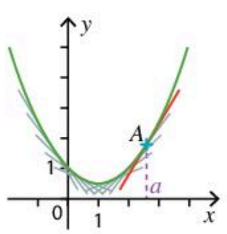
Propriété (admise)

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

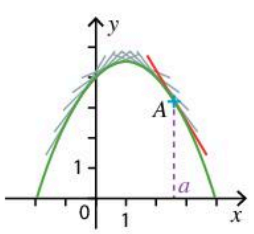
- Sur I, f est convexe si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.
- Sur I, f est concave si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes.

Exemples

- La fonction f est convexe.



- La fonction f est concave.



Propriété (admise)

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

- Sur l'intervalle I : f est convexe $\Leftrightarrow$ f'' est positive $\Leftrightarrow$ f' est croissante.
- Sur l'intervalle I : f est concave $\Leftrightarrow$ f'' est négative $\Leftrightarrow$ f' est décroissante.

Exemple

On considère la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.
On a $f'(x) = 6x - 5$ et $f''(x) = 6$; $f''(x) > 0$, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. Point d'inflexion

Propriété (admise)

Soient f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Si f' change de sens de variation en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.
- Si f'' s'annule en changeant de signe en a, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

Méthode 1 Utiliser le signe d'une dérivée seconde pour étudier la convexité d'une fonction

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$.

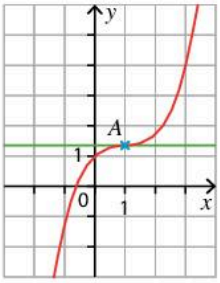
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère.

1. Calculer la dérivée seconde de f.
2. En déduire la convexité de f.
3. Déterminer les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
4. Vérifier les résultats graphiquement à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de géométrie.

Solution commentée

1. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme avec $f'(x)=x^2-2x+1$ et donc $f''(x)=2x-2$.

2. $f''(x)=2x-2=2(x-1)$
Pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;1]$, $f''(x)\leqslant 0$, donc f est concave sur $]-\infty\,;1]$.
Pour tout réel x appartenant à $[1\,;+\infty[$, $f''(x)\geqslant 0$, donc f est convexe sur $[1\,;+\infty[$.



3. En $x=1$, f'' s'annule en changeant de signe, donc $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 1.
On note A ce point sur la figure ci-contre.

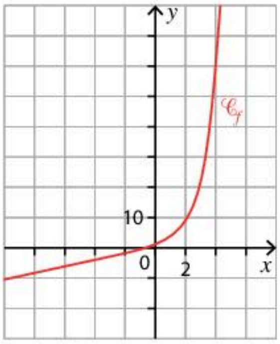
4. Voir figure ci-contre.

Méthode 2 Utiliser le sens de variation d'une fonction dérivée pour étudier la convexité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\mathrm{e}^x$.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Déterminer le sens de variation de f'.
3. En déduire la convexité de f.
4. Vérifier les résultats graphiquement à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de géométrie.

Solution commentée



1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x)=1+\mathrm{e}^x$.

2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. La dérivée de f est strictement croissante, donc f est convexe.

4. Voir figure ci-contre.

Remarque
Pour étudier la convexité d'une fonction, quand cela est possible, il est en général plus simple d'utiliser le signe de la dérivée seconde que le sens de variation de la dérivée.