MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 6

FONCTION LOGARITHME

1. Fonction logarithme népérien

1. Fonction réciproque de la fonction exponentielle

Propriété et définitions

- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

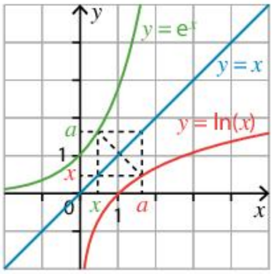
Cette solution se note $x = \ln(a)$ et s'appelle le **logarithme népérien** de a.

- La fonction qui, à tout réel $a > 0$, associe le réel $\ln(a)$ s'appelle la **fonction logarithme népérien.**

C'est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0\,;+\infty[$ et elle est notée ln.

Propriété

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Remarque

En sciences, on utilise aussi la fonction logarithme décimal, notée log, définie par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

On définit de même, pour tout réel a strictement positif, la fonction logarithme de base a par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Ainsi, la fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e.

Propriétés

- Pour tout réel $b > 0$ et pour tout réel a, $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$.
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$.
- Pour tout réel a, $\ln\left(e^a\right) = a$.

2. Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Propriété (relation fonctionnelle)

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Propriétés (conséquences de la relation fonctionnelle)

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- Pour tout entier relatif n, $\ln\left(x^n\right) = n \times \ln(x)$.
- $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$

Méthode 1 Déterminer un ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f(x)=\ln(3x-5)$
2. $g(x)=\ln\left(-x^2-5x+6\right)$

Solution commentée

1. $\ln(3x-5)$ existe si et seulement si $3x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$. L'ensemble de définition de f est $\left]\frac{5}{3}\,;+\infty\right[$.
2. $\ln\left(-x^2-5x+6\right)$ existe si et seulement si $-x^2-5x+6>0$. Ce trinôme est du signe de $a=-1$ sauf entre ses racines -6 et 1. L'ensemble de définition de g est $]-6\,;1[$.

EXERCICE 36 p. 196

Méthode 2 Résoudre des équations avec ln

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x=4$
2. $e^{2x+7}=2$
3. $\ln(x)=-5$
4. $\ln(-3x+5)=-1$

Solution commentée

1. Par définition, $e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln(4)$. La solution est $\ln(4)$.
2. $e^{2x+7}=2 \Leftrightarrow 2x+7=\ln(2) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(2)-7}{2}$. La solution est $\dfrac{\ln(2)-7}{2}$.
3. Pour $x>0$, $\ln(x)=-5 \Leftrightarrow x=e^{-5}$. La solution est e^{-5}.
4. $\ln(-3x+5)$ existe si et seulement si $-3x+5>0 \Leftrightarrow -3x>-5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{3}$.

   Pour $x<\frac{5}{3}$, $\ln(-3x+5)=-1 \Leftrightarrow -3x+5=e^{-1} \Leftrightarrow -3x=e^{-1}-5 \Leftrightarrow x=\dfrac{e^{-1}-5}{-3} \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}-\frac{e^{-1}}{3}$.

   La solution est $\frac{5}{3}-\frac{e^{-1}}{3}$, qui s'écrit aussi $\frac{5}{3}-\frac{1}{3e}$.

EXERCICE 3 p. 194

Méthode 3 Transformer des écritures

1. Démontrer que $\ln(8)-\ln(2)+\ln(4)-\ln(16)$ est un nombre entier.
2. Démontrer que $\ln(48)-3\ln(2)=\ln(6)$.
3. Démontrer que $\ln\left(\sqrt{5}-1\right)+\ln\left(\sqrt{5}+1\right)=2\ln(2)$.
4. Calculer $\ln\left(e^2\sqrt{e}\right)$, puis $\ln\left(\sqrt{e}\right)-2\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.
5. Soit $f(x)=x\ln(x)$. Calculer en fonction de e les réels $f\left(\frac{1}{e}\right)$, $f\left(\sqrt{e}\right)$ et $f\left(e\sqrt{e}\right)$.

Solution commentée

1. $\ln(8)-\ln(2)+\ln(4)-\ln(16)=\ln\left(\dfrac{8\times 4}{2\times 16}\right)=\ln\left(\dfrac{32}{32}\right)=\ln(1)=0$. C'est un nombre entier.
2. $\ln(48)-3\ln(2)=\ln(48)-\ln\left(2^3\right)=\ln(48)-\ln(8)=\ln\left(\dfrac{48}{8}\right)=\ln(6)$.
3. $\ln\left(\sqrt{5}-1\right)+\ln\left(\sqrt{5}+1\right)=\ln\left(\left(\sqrt{5}-1\right)\times\left(\sqrt{5}+1\right)\right)=\ln\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2\right)=\ln(4)=2\ln(2)$.
4. • $\ln\left(e^2\sqrt{e}\right)=\ln\left(e^2\right)+\ln\left(\sqrt{e}\right)=2\ln(e)+\frac{1}{2}\ln(e)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

   • $\ln\left(\sqrt{e}\right)-2\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}\ln(e)-2\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}\ln(e)+2\ln(e)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$.
5. • $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}\ln(e)=-\frac{1}{e}$

   • $f\left(\sqrt{e}\right)=\sqrt{e}\ln\left(\sqrt{e}\right)=\sqrt{e}\times\frac{1}{2}\ln(e)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

   • $f\left(e\sqrt{e}\right)=e\sqrt{e}\ln\left(e\sqrt{e}\right)=e\sqrt{e}\left(\ln(e)+\ln\left(\sqrt{e}\right)\right)=e\sqrt{e}\left(\ln(e)+\frac{1}{2}\ln(e)\right)=\sqrt{e}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}e\sqrt{e}$

2. Variations et limites de la fonction ln

1. Dérivée et variations

Propriétés

- La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$:

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}.$$

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout x appartenant à I, $u(x)>0$.

La fonction $\ln\circ u : x\mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $(\ln\circ u)'=\frac{u'}{u}$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+1)$.

$f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=x^2+1$. Alors, pour tout réel x, $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x}{x^2+1}$.

Propriété

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Conséquences

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b$
- $\ln(a)\leqslant\ln(b)\Leftrightarrow a\leqslant b$

En particulier, on a :

- $\ln(a)\leqslant 0\Leftrightarrow a\in\,]0\,;1]$
- $\ln(a)\geqslant 0\Leftrightarrow a\in[1\,;+\infty[$

2. Limites

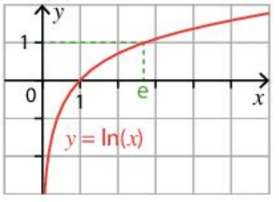
Propriétés

- $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$

Conséquences

- La courbe de la fonction ln admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.
- Le tableau de variation de la fonction ln est le suivant.

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



Propriétés (croissances comparées)

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}x\ln(x)=0$
- Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln(x)=0$.

Méthode 1 Étudier le sens de variation d'une fonction

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

Solution commentée

$f=\dfrac{u}{v}$, où $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=x$; alors $f'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$, avec $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v'(x)=1$.

Donc, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

Pour tout $x>0$, $x^2>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$.

Or, pour tout $x>0$, $1-\ln(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x)\leqslant 1 \Leftrightarrow x\leqslant \mathrm{e}$.

Donc, pour tout $x\in\,]0\ ;\mathrm{e}]$, $f'(x)\geqslant 0$ et, pour tout $x\in[\mathrm{e}\ ;+\infty[$, $f'(x)\leqslant 0$.

La fonction f est croissante sur $]0\ ;\mathrm{e}]$ et décroissante sur $[\mathrm{e}\ ;+\infty[$.

EXERCICE 28 p. 196

Méthode 2 Résoudre une inéquation avec ln

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(5x+4)\geqslant 9$.

Solution commentée

$\ln(5x+4)$ existe si et seulement si $5x+4>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{4}{5}$.

Pour $x>-\dfrac{4}{5}$, $\ln(5x+4)\geqslant 9 \Leftrightarrow 5x+4\geqslant \mathrm{e}^9 \Leftrightarrow x\geqslant \dfrac{\mathrm{e}^9-4}{5} \Leftrightarrow x\geqslant -\dfrac{4}{5}+\dfrac{\mathrm{e}^9}{5}$. Donc $\mathcal{S}=\left[-\dfrac{4}{5}+\dfrac{\mathrm{e}^9}{5}\ ;+\infty\right[$.

EXERCICE 40 p. 196

Méthode 3 Déterminer une limite avec la fonction ln

Soient g et h les fonctions définies sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\ln(x)}{x+1}$ et $h(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x)$.

1. Étudier la limite de $g(x)$ en $+\infty$.
2. Étudier la limite de $h(x)$ en 0.

Solution commentée

1. La forme est indéterminée : on transforme l'écriture de $g(x)$ pour faire apparaître $\dfrac{\ln(x)}{x}$.

$g(x)=\dfrac{\ln(x)}{x+1}=\dfrac{\ln(x)}{x}\times\dfrac{x}{x+1}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1$.

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

2. La forme est indéterminée, on factorise par $\dfrac{1}{x}$: $h(x)=\dfrac{1}{x}(1+x\ln(x))$.

On a $\lim\limits_{x\to0}x\ln(x)=0$ et, par suite, $\lim\limits_{x\to0}(1+x\ln(x))=1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to0}h(x)=+\infty$.

EXERCICE 26 p. 195

Méthode 4 Étudier les limites d'une fonction composée

Déterminer les limites en -1 et $+\infty$ de la fonction f définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$.

Solution commentée

On pose $X=\dfrac{1}{x+1}$. $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty\end{array}\right.$ d'où $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=+\infty$. $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=0\\ \lim\limits_{X\to0}\ln(X)=-\infty\end{array}\right.$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.