MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 7

Connaître le cours

1. Diviseurs communs ; PGCD

1. PGCD de deux entiers naturels

Définition

Soient a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls.
On note $D(a\,;b)$ l'ensemble des diviseurs communs de a et de b.
L'ensemble $D(a\,;b)$ contient un plus grand élément, noté PGCD$(a\,;b)$, que l'on appelle plus grand commun diviseur de a et de b.

Remarques

- $D(a\,;b)=D(a)\cap D(b)$. $D(a\,;b)$ n'est pas vide car $1\in D(a\,;b)$, donc PGCD$(a\,;b)\geqslant 1$.
- $D(a\,;b)$ contient un nombre fini d'éléments car, si $a\neq 0$, $D(a)$ contient un nombre fini d'éléments et $D(a\,;b)\subset D(a)$.

Exemple

$D(9\,;15)=\{-3\,;-1;1;3\}$, donc PGCD$(9\,;15)=3$.

Remarques

- Si a et b sont deux entiers relatifs, alors $D(a\,;b)=D(|a|\,;|b|)$, donc on peut définir le PGCD de deux entiers relatifs a et b non tous les deux nuls par PGCD$(a\,;b)=$PGCD$(|a|\,;|b|)$.
- Si a est un entier naturel non nul alors $D(a\,;0)=D(a)$, donc PGCD$(a\,;0)=a$.

2. Algorithme d'Euclide

Propriété

DÉMO p. 145

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et r le reste de la division euclidienne de a par b alors $D(a\,;b)=D(b\,;r)$.

Propriété et définition

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
L'algorithme d'Euclide consiste à effectuer d'abord la division euclidienne de a par b, puis successivement les divisions euclidiennes du diviseur et du reste de la division précédente :

Étape	Division	Dividende	Diviseur	Reste
1	$a=bq_1+r_1$	a	b	$0\leqslant r_1<b$
2	$b=r_1q_2+r_2$	b	r_1	$0\leqslant r_2<r_1$
3	$r_1=r_2q_3+r_3$	r_1	r_2	$0\leqslant r_3<r_2$
…	…	…	…	…
n	$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+0$	r_{n-2}	r_{n-1}	0

Après avoir effectué un nombre fini n d'étapes, on obtient une division euclidienne dont le reste est nul : le PGCD de a et de b est alors le dernier reste non nul soit PGCD$(a\,;b)=r_{n-1}$.

3. Ensemble des diviseurs communs

Propriété

DÉMO en ligne

Soient a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls et $d=$PGCD$(a\,;b)$.
L'ensemble des diviseurs communs de a et de b est l'ensemble des diviseurs de d, c'est-à-dire $D(a\,;b)=D(d)$.

Exercice résolu 1 Déterminer un PGCD

1 Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 78.

2 En déduire les diviseurs communs de 78 et 925 665, puis leur PGCD.

Solution commentée

1 Pour obtenir les diviseurs de 78, on écrit tous les produits qui donnent 78 :

$78 = 1 \times 78$

$78 = 2 \times 39$

$78 = 3 \times 26$

$78 = 6 \times 13$

On s'arrête dans la colonne de gauche à 6 car le diviseur suivant est 13 qui est écrit dans la colonne de droite. Donc les diviseurs positifs de 78 sont 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 13 ; 26 ; 39 et 78.

2 Comme $D(78\,;925\,665) \subset D(78)$, alors, pour déterminer les diviseurs communs de 78 et 925 665, il est inutile de chercher tous les diviseurs de 925 665, il suffit de tester la divisibilité de 925 665 par les diviseurs positifs de 78. Comme seuls les entiers 1, 3, 13 et 39 divise 925 665, alors $D(78\,;925\,665) = \{-39\,;-13\,;-3\,;-1\,;1\,;3\,;13\,;39\}$ et $\text{PGCD}(78\,;925\,665) = 39$.

Exercice résolu 2 Déterminer un PGCD grâce à l'algorithme d'Euclide

1 À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD de 1 551 et 132. Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

2 En déduire l'ensemble des diviseurs communs de 1 551 et 132.

Solution commentée

1 $1\,551 = 11 \times 132 + 99$

$132 = 1 \times 99 + 33$

$99 = 3 \times 33 + 0$

Donc $\text{PGCD}(1\,551;132) = 33$. On vérifie sur la calculatrice ce résultat :

```
pgcd(1551,132)
                33
```

Sur la calculatrice TI, on tape sur la touche math, on sélectionne NBRE puis 9↓pgcd(.

Sur la calculatrice Casio, on tape sur la touche OPTN, on sélectionne NUMERIC puis GCD.

Sur la calculatrice Numworks, on tape sur la touche paste, on sélectionne Arithmetic puis gcd(p,q).

2 $D(1\,551;132) = D(33)$, donc $D(1\,551;132) = \{-33;-11;-1;1;11;33\}$.

Exercice résolu 3 Déterminer un PGCD à l'aide de la division euclidienne

Soit n un entier naturel tel que $n > 1$. On pose $a = 5n+7$ et $b = n+1$.

1 Écrire la division euclidienne de a par b. En déduire que $D(a\,;b) = D(n+1;2)$.

2 En déduire $\text{PGCD}(a\,;b)$ selon les valeurs de n.

Solution commentée

1 $5n+7 = 5(n+1)+2$. Comme $n > 1$ alors $0 \leqslant 2 < n+1$ et c'est la division euclidienne de a par b. D'après le résultat du cours, on a donc $D(a\,;b) = D(n+1;2)$.

2 Comme $D(a\,;b) = D(n+1;2)$, alors $\text{PGCD}(a\,;b)$ est un diviseur positif de 2, c'est-à-dire 1 ou 2.

Si 2 divise $n+1$, c'est-à-dire lorsque n est impair, alors $\text{PGCD}(a\,;b) = 2$.

Si 2 ne divise pas $n+1$ c'est-à-dire lorsque n est pair, alors $\text{PGCD}(a\,;b) = 1$.

Connaître le cours

2. Nombres premiers entre eux

1. Couples d'entiers premiers entre eux

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
On dit que a et b sont premiers entre eux lorsque $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

Remarque

Les seuls diviseurs communs de deux entiers premiers entre eux sont -1 et 1.

Définition

Soient a un entier relatif et b un entier naturel non nul.
La fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si les entiers a et b sont premiers entre eux

Exemple

La fraction $\frac{16}{9}$ est irréductible car les nombres 9 et 16 sont premiers entre eux.

Propriété

DÉMO en ligne

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. Si $d=\text{PGCD}(a\,;b)$, alors il existe deux entiers a' et b' tels que $a=da'$ et $b=db'$ et $\text{PGCD}(a'\,;b')=1$.

2. Théorème de Bézout

Théorème de Bézout

DÉMO en ligne

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$.

Exemple

D'après le théorème de Bézout, 127 et 128 sont premiers entre eux car on peut écrire $1\times128+(-1)\times127=1$.

Remarque

Le théorème de Bézout donne l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$, mais ne donne pas de méthode pour déterminer u et v. Pour obtenir ces coefficients, on peut par exemple utiliser l'algorithme d'Euclide.

3. Caractérisation du PGCD

Théorème de Bézout généralisé

DÉMO p. 144

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
$\text{PGCD}(a\,;b)=d$ si et seulement si d divise a et b et si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=d$.

Remarque

La condition d divise a et b est nécessaire. Par exemple $5=3\times1+2\times1$, mais 5 n'est pas le PGCD de 2

Exercice résolu 1 Calculer les coefficients de Bézout

À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $38u+15v=1$.

Solution commentée

On écrit l'algorithme d'Euclide et on isole les restes non nuls obtenus :

$38=2\times15+8$ $\qquad$ $8=38-2\times15$

$15=1\times8+7$ $\qquad$ $7=15-1\times8$

$8=1\times7+1$ $\qquad$ $1=8-1\times7$

$7=7\times1+0$

On remonte l'algorithme d'Euclide en partant du dernier reste non nul :

$$\begin{aligned}1&=8-1\times7=8-1(15-1\times8)\\&=2\times8-1\times15=2\times(38-2\times15)-1\times15\\&=2\times38-5\times15\end{aligned}$$

Donc le couple $(u\,;v)=(2;-5)$ convient.

Exercice résolu 2 Montrer que deux entiers sont premiers entre eux

À l'aide de la calculatrice, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $13u+19v=1$.

Que peut-on en déduire pour les entiers 13 et 19 ?

Solution commentée

On isole une inconnue $13u+19v=1 \Leftrightarrow 19v=1-13u \Leftrightarrow v=-\frac{13}{19}u+\frac{1}{19}$.

Puis on affiche le tableau de valeurs de la fonction $f(x)=-\frac{13}{19}x+\frac{1}{19}$ avec un pas de 1. On lit par exemple que $f(3)=-2$.

Donc $13\times3+19\times(-2)=1$. On a ainsi trouvé une combinaison linéaire de 13 et 19 donnant 1. D'après le théorème de Bézout 13 et 19 sont donc premiers entre eux.

X	Y1
0	0.0526
1	-0.632
2	-1.316
3	-2
4	-2.684
5	-3.368
6	-4.053
7	-4.737
8	-5.421
9	-6.105
10	-6.789

Exercice résolu 3 Utiliser un PGCD

Déterminer tous les couples d'entiers naturels non nuls $(x\,;y)$ tels que $\begin{cases}x+y=5\,664\\ \text{PGCD}(x\,;y)=354\end{cases}$.

Solution commentée

Le PGCD de x et y est 354, donc il existe deux entiers x' et y' tels que $x=354x'$ et $y=354y'$ et $\text{PGCD}(x',y')=1$.

Le problème se ramène donc à la recherche de deux entiers naturels x' et y' tels que $\text{PGCD}(x',y')=1$ et $354x'+354y'=5\,664 \Leftrightarrow x'+y'=16$.

On peut alors chercher tous les cas possibles car ils sont peu nombreux. On trouve 4 paires possibles : 1 et 15, 3 et 13, 5 et 11, 7 et 9. Étant donné la symétrie du problème, cela donne 8 solutions possibles que l'on obtient en multipliant les nombres obtenus précédemment par 354. On vérifie que, dans chaque cas, la somme vaut bien 5 664. On obtient ainsi :

$S=\{(354,5310);(1062,4\,602);(1770,3894);(2\,478,3186);(5310,354);(4\,602,1062);(3894,1770);(3186,2478)\}$

3. Conséquences du Théorème de Bézout

1. Résolution d'équations diophantiennes

DÉMO p. 145

Propriété

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
L'équation $ax+by=c$ où les inconnues x et y sont des entiers relatifs admet des solutions si et seulement si c est un multiple du PGCD de a et de b.

Exemple

Comme PGCD$(2;3)=1$, alors l'équation $2x+3y=1$ admet au moins un couple d'entiers solution.

Remarques

- Une telle équation dont les inconnues sont des nombres entiers s'appelle une équation diophantienne.
- Si $c=$PGCD$(a;b)$, le théorème de Bézout généralisé donne l'existence d'un couple $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ solution de l'équation $ax+by=c$.

2. Homogénéité du PGCD

DÉMO p. 152

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
Pour tout entier naturel k non nul, PGCD$(ka;kb)=k$PGCD$(a;b)$

Exemple

PGCD$(60;90)=$PGCD$(30\times2;30\times3)=30\times$PGCD$(2;3)=30$, car PGCD$(2;3)=1$.

3. Théorème de Gauss

DÉMO p. 144

Théorème de Gauss

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Remarque

La condition a et b premiers entre eux est nécessaire. Par exemple 4 divise $12=2\times6$, mais 4 ne divise ni 2 ni 6.

DÉMO p. 144

Corollaire

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise c et b divise c avec a et b premier entre eux alors ab divise c.

Remarque

La condition a et b premiers entre eux est nécessaire. Par exemple 4 divise 12 et 6 divise 12, mais $4\times6=24$ ne divise pas 12.

Exemple

Soient n un entier naturel et $N=n(n+1)(n+2)$.
Comme n et $n+1$ sont deux entiers consécutifs, alors 2 divise l'un d'entre eux et donc 2 divise N.
Comme n, $n+1$ et $n+2$ sont trois entiers consécutifs, alors 3 divise l'un d'entre eux et donc 3 divise N.
Comme PGCD$(2;3)=1$, alors d'après le corollaire $2\times3=6$ divise aussi N.

Exercice résolu 1 Déterminer si une équation diophantienne admet des solutions

Parmi les équations suivantes où les inconnues x et y sont des entiers relatifs, quelles sont celles qui admettent au moins une solution ? Justifier.

1. (E_1) : $13x+14y=3$
2. (E_2) : $39x-42y=2$

Solution commentée

1. Comme $14\times1+13\times(-1)=1$, alors d'après le théorème de Bézout, $\text{PGCD}(13\,;14)=1$.
3 étant un multiple de 1, alors l'équation (E_1) admet des solutions.

2. $\text{PGCD}(39\,;-42)=\text{PGCD}(39\,;42)=3\times\text{PGCD}(13\,;14)$ d'après l'homogénéité du PGCD, donc $\text{PGCD}(39\,;-42)=3$. Comme 2 n'est pas un multiple de 3 alors, d'après la propriété, l'équation (E_2) n'a pas de solution.

Exercice résolu 2 Résoudre une équation diophantienne

On considère l'équation (E) : $2x+5y=4$ où $(x\,;y)\in\mathbb{Z}^2$.

1. Trouver deux entiers relatifs u et v tels que $2u+5v=1$.
2. En déduire une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ de (E).
3. Justifier que $(E)\Leftrightarrow 2(x-x_0)=5(y_0-y)$. En déduire toutes les solutions de (E).

Solution commentée

1. $2\times(-2)+5\times1=1$, donc le couple $(u\,;v)=(-2\,;1)$ convient.

2. $2\times(-2)+5\times1=1 \Leftrightarrow 2\times(-2)\times4+5\times1\times4=1\times4$, soit
$2\times(-8)+5\times4=4$ et donc le couple $(x_0\,;y_0)=(-8\,;4)$ est solution de (E).

3. D'après la question précédente, $4=2x_0+5y_0$, alors l'équation (E) peut s'écrire
$2x+5y=2x_0+5y_0 \Leftrightarrow 2(x-x_0)=5(y_0-y)\Leftrightarrow 2(x+8)=5(4-y)$.
Alors 2 divise $5(4-y)$ et $\text{PGCD}(2\,;5)=1$ alors, d'après le théorème de Gauss, 2 divise $(4-y)$, c'est-à-dire $4-y=2k$ $(k\in\mathbb{Z})$ et $y=4-2k$.
En remplaçant y par $4-2k$ dans l'équation $2(x+8)=5(4-y)$, on obtient $2(x+8)=5\times2k$ soit $x+8=5k$ et $x=-8+5k$.
Réciproquement, on vérifie que les couples d'entiers $(x\,;y)=(-8+5k\,;4-2k)$ sont solutions de (E) en calculant : $2(-8+5k)+5(4-2k)=-16+20+10k-10k=4$.
On conclut que $S=\{(-8+5k\,;4-2k)\text{, où } k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice résolu 3 Démontrer une divisibilité

Soit n un entier naturel. Démontrer que $A=n(n^4-1)$ est divisible par 10.

Solution commentée

On teste d'abord la divisibilité par 2 : Si $n\equiv0\ [2]$, alors n est un multiple de 2 et si $n\equiv1\ [2]$, alors $n^4-1\equiv0\ [2]$, donc n^4-1 est un multiple de 2. Donc A est divisible par 2.
Puis on teste la divisibilité par 5 :

Si $n\equiv\ldots\ [5]$	0	1	2	3	4
alors $n^4\equiv\ldots\ [5]$	0	1	16 ou 1	81 ou 1	256 ou 1
Donc $n(n^4-1)\equiv\ldots\ [5]$	0	0	0	0	0

Donc A est divisible par 5. Comme $\text{PGCD}(2\,;5)=1$ alors, d'après le corollaire du théorème de Gauss, A est divisible par 10.