MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 7

Lois des probabilités discrètes

1. Conditionnement et indépendance

1. Rappel de probabilités conditionnelles

Définition

Soient A et B deux évènements tels que $P(\mathrm{B}) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de A sachant B est le nombre, noté $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$, défini par :

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}.$$

Propriété : Formule de Bayes

Soient A et B deux évènements tels que $P(\mathrm{B}) \neq 0$.
On a :

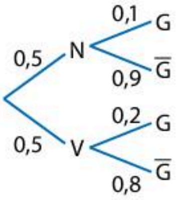
$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) = P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{A})$$

ou encore

$$P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{B})}.$$

Exemple

On considère des évènements N, V et G d'un univers de probabilité tel qu'on ait construit l'arbre ci-contre.



On en déduit que $P(\mathrm{G}) = 0{,}15$.
D'après l'arbre, on a $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{G}) = 0{,}1$.
On peut calculer :

$$P_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}) = \frac{P_{\mathrm{V}}(\mathrm{G}) \times P(\mathrm{V})}{P(\mathrm{G})} = \frac{0{,}2 \times 0{,}5}{0{,}15} = \frac{2}{3}.$$

Définition

On dit que deux évènements A et B de probabilités non nulles sont **indépendants** lorsque $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$.

Propriété

- A et B sont indépendants si et seulement si $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$.
- A et B sont indépendants si et seulement si $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A})$.

2. Théorème des probabilités totales

Propriété (admise) : Théorème des probabilités totales

On considère un univers Ω et $\{\mathrm{A}_1 ; \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_n\}$ une partition de l'univers en n évènements $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_n$ de probabilité non nulle (l'intersection des évènements deux à deux est vide et $\Omega = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n$).
Pour tout évènement B de Ω, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{B}) &= P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_1) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_2) + \ldots + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_n) \\ &= P(\mathrm{A}_1) \times P_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2) \times P_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}) + \ldots + P(\mathrm{A}_n) \times P_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}). \end{aligned}$$

Méthode 1 Réinvestir les probabilités conditionnelles

Le service publicitaire d'une grande enseigne de téléphonie a procédé à une enquête sur le comportement de sa clientèle. On suppose que l'enquête porte sur un nombre suffisamment grand de personnes pour assimiler les pourcentages aux probabilités sorrespondantes.

Il a été observé que 60 % des acheteurs de téléphone sont des femmes. 30 % des femmes qui entrent dans la boutique achètent un téléphone alors que cette proportion est de 55 % chez les hommes.

Lorsqu'une personne entre dans la boutique, on note les évènements suivants :
- F : « La personne est une femme » ;
- H : « La personne est un homme » ;
- T : « La personne achète un téléphone ».

1. Écrire, avec des symboles mathématiques, la probabilité que la personne n'achète pas de téléphone sachant que c'est une femme qui est entrée dans la boutique. Combien vaut cette probabilité ?
2. Interpréter avec une phrase la probabilité $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{T})$. Combien vaut cette probabilité ?

Solution commentée

1. $P_{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{T}}) = 0{,}7$, car 30 % des femmes qui entrent dans la boutique achètent un téléphone, donc 70 % n'en achètent pas.

2. $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{T})$ est la probabilité qu'un téléphone ait été acheté sachant qu'un homme est entré. 55 % des hommes qui entrent dans la boutique achètent un téléphone, donc $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{T}) = 0{,}55$.

Méthode 2 Utiliser la formule des probabilités totales

Lors de l'étude de la fiabilité d'un test de grossesse, on a obtenu les résultats suivants :
- 99 % des femmes enceintes obtiennent un résultat positif à leur test ;
- 96 % des femmes qui ne sont pas enceintes obtiennent un test négatif.

Une étude a également montré que 70 % des femmes qui achètent ce test de grossesse sont véritablement enceintes.

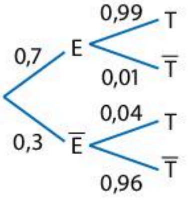
On choisit une femme au hasard parmi celles qui achètent ce test de grossesse.

On note E l'évènement « Être enceinte » et T l'évènement « Obtenir un test positif ».

1. Construire un arbre de probabilité représentant cette situation.
2. Calculer $P(\mathrm{T})$.
3. Une femme a obtenu un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit enceinte ?
   Donner le résultat exact sous forme de fraction irréductible puis une valeur approchée au millième.

Solution commentée

1. D'après l'énoncé $P_{\mathrm{E}}(\mathrm{T}) = 0{,}99$ et $P_{\overline{\mathrm{E}}}(\overline{\mathrm{T}}) = 0{,}96$.



2. On utilise la formule des probabilités totales car $\{\mathrm{E}\,;\overline{\mathrm{E}}\}$ est une partition de Ω.

$$\begin{aligned} P(\mathrm{T}) &= P(\mathrm{E}) \times P_{\mathrm{E}}(\mathrm{T}) + P(\overline{\mathrm{E}}) \times P_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{T}) \\ &= 0{,}7 \times 0{,}99 + 0{,}3 \times 0{,}04 \\ &= 0{,}705 \end{aligned}$$

3. On cherche $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{E})$.

On a, d'après la formule de Bayes, $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{E}) = \dfrac{P_{\mathrm{E}}(\mathrm{T}) \times P(\mathrm{E})}{P(\mathrm{T})} = \dfrac{0{,}99 \times 0{,}7}{0{,}705} = \dfrac{231}{235} \approx 0{,}983$.

2. Loi uniforme discrète

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$.
On dit que X suit la **loi uniforme** sur $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$ lorsque :

$$\text{pour tout } k \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ ;\ n\},\ P(X=k)=\frac{1}{n}.$$

Exemples

- Un professeur souhaite interroger un élève au hasard dans sa classe de Terminale qui contient 35 élèves. Pour cela, il considère la variable aléatoire N qui, à chaque élève, associe son rang dans l'ordre alphabétique de la classe.

Il annonce alors à haute voix et de manière aléatoire une valeur de N.
L'univers Ω est l'ensemble des 35 élèves. Aucun élève n'a de raison d'être plus souvent interrogé qu'un autre. La variable N prend pour valeurs $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ ;\ 35\}$.

Pour tout entier k compris entre 1 et 35, $P(X=k)=\frac{1}{35}$.

N suit la loi uniforme sur $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ ;\ 35\}$.

- Une roue de loterie possède huit secteurs colorés.

Quand la roue s'immobilise, le secteur désigné par la flèche détermine l'issue de l'expérience aléatoire.
Les secteurs Bleu et Jaune rapportent 2 points. Les secteurs Rouge et Vert rapportent 1 point.
On suppose que chaque secteur a la même probabilité d'apparaître.
La variable X, qui à chaque issue, attribue le nombre de points, suit la loi uniforme sur $\{1\ ;\ 2\}$. En effet, $P(X=1)$ est la probabilité de l'évènement « Le secteur désigné est rouge ou vert ».

Donc $P(X=1)=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

De même, $P(X=2)$ est la probabilité de l'évènement « Le secteur désigné est bleu ou jaune ».

Donc $P(X=2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Propriété : Espérance mathématique de la loi uniforme

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ ;\ n\}$.

L'espérance mathématique de X vaut $E(X)=\frac{n+1}{2}$.

DÉMONSTRATION

Pour tout entier k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $P(X=k)=\frac{1}{n}$.

L'espérance vaut, par définition,
$$E(X)=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+3\times\frac{1}{n}+\ldots+n\times\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}.$$

Or on sait que $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

On en déduit que $E(X)=\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$.

Remarque

On interprète l'espérance mathématique comme étant une moyenne théorique.
Si on réalise un grand nombre de fois, à l'identique, l'expérience aléatoire, la moyenne statistique des valeurs obtenues par la variable aléatoire sera très proche de l'espérance.

Méthode 1 Modéliser par une loi uniforme

On considère une urne qui contient quatre boules vertes, deux boules bleues, deux boules rouges, trois boules orange et une boule jaune. On tire au hasard une boule dans l'urne. L'obtention d'une boule bleue ou d'une boule rouge rapporte 1 point. L'obtention d'une boule verte rapporte 2 points et l'obtention d'une boule orange ou d'une boule jaune rapporte 3 points.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de points obtenus après le tirage d'une boule de l'urne.

• Montrer que X suit la loi uniforme sur $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

Solution commentée

• Comme chaque boule a la même probabilité d'être obtenue (situation d'équiprobabilité), on peut utiliser la formule $P(\text{A}) = \dfrac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre d'issues de l'univers}}$.

Les valeurs possibles de X sont 1, 2 et 3.

$P(X = 1)$ est la probabilité de l'évènement « Obtenir une boule bleue ou une boule rouge ».

Donc $P(X = 1) = \dfrac{2}{12} + \dfrac{2}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

• $P(X = 2)$ est la probabilité de l'évènement « Obtenir une boule verte ».

Donc $P(X = 2) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

• $P(X = 3)$ est la probabilité de l'évènement « Obtenir une boule jaune ou une boule orange ».

Donc $P(X = 3) = \dfrac{3}{12} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3}$.

$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \dfrac{1}{3}$ donc X suit la loi uniforme sur $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

Méthode 2 Utiliser une loi uniforme

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $\{1\,;2\,;\ldots\,;100\}$.

1. Déterminer $P(X = 50)$, $P(X \leqslant 25)$, $P(10 \leqslant X \leqslant 30)$ et $P(X \geqslant 60)$.
2. Calculer son espérance mathématique et interpréter le résultat.

Solution commentée

1. • L'évènement $(X = 50)$ est un évènement élémentaire. Donc $P(X = 50) = \dfrac{1}{100}$.

• L'évènement $(X \leqslant 25)$ contient tous les évènements élémentaires de 1 à 25.

Donc $P(X \leqslant 25) = 25 \times \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

• L'évènement $(10 \leqslant X \leqslant 30)$ contient les évènements élémentaires de 10 à 30 compris. Il y en a 21, donc $P(10 \leqslant X \leqslant 30) = 21 \times \dfrac{1}{100} = \dfrac{21}{100} = 0{,}21$.

• L'évènement $(X \geqslant 60)$ contient tous les évènements élémentaires de 60 à 100 compris. Il y en a 41, donc $P(X \geqslant 60) = 41 \times \dfrac{1}{100} = \dfrac{41}{100} = 0{,}41$.

2. X suit une loi uniforme sur $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$ avec $n = 100$.

Donc $E(X) = \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{101}{2} = 50{,}5$.

Si on réalise un très grand nombre de fois à l'identique l'expérience aléatoire associée à la variable aléatoire X, la moyenne statistique des valeurs obtenues sera très proche de l'espérance 50,5.

Connaître le cours

3. Loi et schéma de Bernoulli

1. Loi de Bernoulli

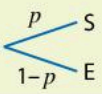
Définition

Dans un univers Ω, on considère un évènement nommé S. On note E l'évènement contraire de S dans Ω.
On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire qui comporte deux issues : S et E.
L'évènement S s'appelle le « succès ». L'évènement E s'appelle « l'échec ».

Propriété : Loi de Bernoulli

Dans une épreuve de Bernoulli, si $P(\text{S}) = p$, alors $P(\text{E}) = 1 - p$.

Représentation en arbre : Tirage



Exemple

Dans un jeu de 32 cartes indiscernables au toucher, on choisit une carte au hasard. On s'intéresse à l'évènement S : « La carte tirée est un as ».
On a alors une épreuve de Bernoulli où S est le succès.
Il y a équiprobabilité du choix d'une carte parmi les 32 cartes du jeu. On a alors :

$$P(\text{S}) = \frac{\text{nombre d'as}}{\text{nombre de cartes}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

L'échec E consiste à ne pas tirer un as. On a donc $P(\text{E}) = \frac{7}{8}$.

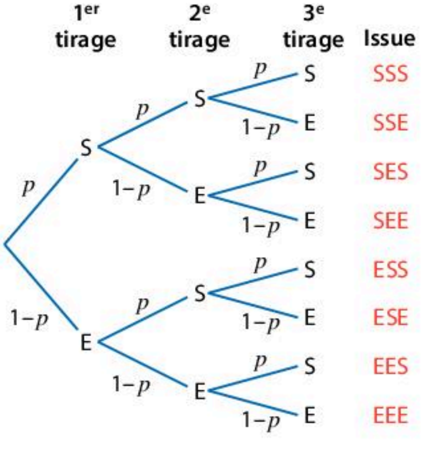
2. Schéma de Bernoulli

Définition

Soit n un entier naturel.
L'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de suite, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli est appelée **schéma de Bernoulli**.
Un schéma de Bernoulli est caractérisé par deux paramètres : le nombre de répétitions n, et la probabilité du succès p.

Exemple

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
On considère que le succès est l'obtention de Pile.
Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli.
On répète trois fois de suite cette épreuve de Bernoulli, de manière indépendante.
On obtient un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$.



Méthode 1 Modéliser par une épreuve ou un schéma de Bernoulli

Une urne contient 30 jetons noirs et 5 jetons rouges, indiscernables au toucher.
On choisit au hasard un jeton dans l'urne et on regarde s'il est rouge.

1 Montrer qu'on peut modéliser cette situation par une épreuve de Bernoulli.
Quel est le succès et sa probabilité ?

2 **a.** Une fois le jeton tiré, on le remet, on mélange et on choisit un deuxième jeton de l'urne. On le remet à nouveau, on mélange et on choisit un troisième jeton dans l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons rouges obtenus au bout des trois tirages.

Cette expérience aléatoire peut-elle être considérée comme un schéma de Bernoulli ? Si oui, préciser ses paramètres n et p.

b. Si, à chaque tirage, on ne remet pas le jeton dans l'urne, peut-on encore modéliser par un schéma de Bernoulli ?

Solution commentée

1 On considère que l'évènement S « Tirer un jeton rouge » dans l'urne est un succès. L'évènement E « Tirer un jeton noir » est donc un échec.
Tirer un jeton de l'urne et regarder sa couleur peut donc être considéré comme une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = P(\text{S}) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$.

2 **a.** Comme il y a remise du jeton tiré, la composition de l'urne ne change pas au deuxième tirage ni au troisième tirage. Les tirages successifs sont donc indépendants.

Cette expérience aléatoire peut être considérée comme un schéma de Bernoulli de paramètres $p = \frac{1}{7}$ et $n = 3$.

b. Comme il n'y pas de remise du jeton tiré, la composition de l'urne change au deuxième tirage puis au troisième tirage. Les tirages successifs ne sont donc plus indépendants.
Cette expérience aléatoire ne peut pas être modélisée par un schéma de Bernoulli.

Méthode 2 Utiliser un schéma de Bernoulli

Sur le trajet qui amène un élève au lycée, il y a quatre croisements successifs avec des feux qui ne sont pas synchronisés. Pour chacun des feux, le rouge dure 30 secondes, l'orange 2 secondes et le vert 20 secondes. On suppose que la couleur d'un feu ne dépend pas de la couleur précédente et que l'élève s'arrête au rouge et à l'orange.

- Quelle est la probabilité que l'élève à vélo ne doive s'arrêter à aucun feu ?

Solution commentée

On considère l'épreuve de Bernoulli, de succès l'évènement S « Arriver devant un feu au vert ».

Le feu vert dure 20 s sur la durée totale du feu qui est $30 + 2 + 20 = 52$. Donc $P(\text{S}) = \frac{20}{52}$.

Cette épreuve est répétée quatre fois de façon indépendante.

On peut donc modéliser cette situation par le schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{20}{52}$.

L'élève ne s'arrêtera à aucun feu signifie que le feu est chaque fois vert. On cherche donc la probabilité de l'évènement SSSS.

On a $P(\text{SSSS}) = \left(\frac{20}{52}\right)^4 \approx 0{,}019$.

4. Coefficients binomiaux

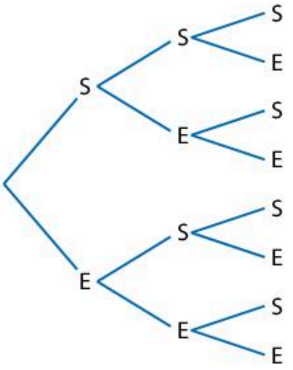
Définition

Soit n un entier naturel et p un réel appartenant à $[0\ ;\ 1]$. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
Le nombre de façons d'obtenir exactement k succès (k entier naturel avec $0 \leqslant k \leqslant n$) s'appelle **coefficient binomial**. Il est noté $\binom{n}{k}$, et se lit « k parmi n ».

Exemple

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre $n = 3$, le nombre de façons d'obtenir exactement deux succès est 3.
On peut en faire rapidement une liste ordonnée : SSE, SES, ESS.
Cela correspond aux trois chemins dans l'arbre qui contiennent deux succès.

On a donc $\binom{3}{2} = 3$



Propriété (admise)

Dans un schéma de Bernoulli, $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins dans l'arbre contenant exactement k succès.

Propriété (admise)

Pour tout entier naturel n et tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (propriété de symétrie) ;
- si $k \neq 0$, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (propriété d'addition).

On peut les présenter dans un triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Triangle de Pascal
Les coefficients binomiaux se calculent de proche en proche à l'aide de la propriété d'addition.
Un mode de génération de ce tableau
• Le triangle de Pascal se construit en mettant des 1 sur la première colonne et sur la diagonale.
• Chaque case est obtenue en faisant la somme de deux cases de la ligne du dessus comme indiqué sur les couleurs ci-dessous.

1 +	2	1		
1 =	3	3 +	1	
1	4	6 =	4	1

Méthode 1 Calculer des coefficients binomiaux avec un arbre ou la calculatrice

1 Déterminer, sans calculatrice, les coefficients binomiaux $\binom{18}{18}$, $\binom{15}{1}$ et $\binom{15}{14}$.

2 À l'aide la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux $\binom{10}{8}$, $\binom{10}{5}$ et $\binom{9}{4}$.

Solution commentée

1 • Il n'y a qu'une seule façon d'obtenir 18 succès parmi 18 répétitions d'une épreuve de Bernoulli. Donc $\binom{18}{18} = 1$.

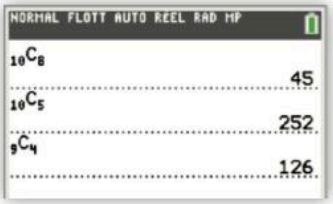
• Il y a quinze façons d'obtenir un succès parmi 15 répétitions d'une épreuve de Bernoulli.

Donc $\binom{15}{1} = 15$.

• En utilisant les propriétés des coefficients binomiaux : $\binom{15}{14} = \binom{15}{1} = 15$.

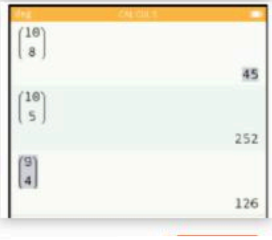
2

TI



Casio

Numworks



Méthode 2 Calculer des coefficients binomiaux avec les propriétés

1 On donne $\binom{25}{3} = 2300$. Calculer $\binom{25}{22}$.

2 On donne $\binom{9}{6} = 84$ et $\binom{9}{7} = 36$. Calculer $\binom{10}{7}$.

Solution commentée

1 On a $\binom{25}{22} = \binom{25}{25-22} = \binom{25}{3} = 2300$

2 $\binom{9}{6} + \binom{9}{7} = \binom{10}{7} = 84 + 36 = 120$

Méthode 3 Calculer des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal

À l'aide du triangle de Pascal, calculer $\binom{6}{4}$, $\binom{7}{3}$ et $\binom{7}{5}$.

Solution commentée

On construit le triangle de Pascal jusqu' à $n = 7$ et $k = 4$ pour pouvoir calculer les coefficients binomiaux demandés.

$\binom{6}{4} = 15$; $\binom{7}{3} = 35$

$\binom{7}{5} = \binom{7}{7-5} = \binom{7}{2} = 21$

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1
5	1	5	10	10 +	5
6	1	6	15 +	20 =	15
7	1	7	21 =	35	35

5. Loi binomiale

1. Définition et caractéristiques

Définition

Soit n un entier naturel et p un réel appartenant à $[0\ ;\ 1]$. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours des n répétitions.

On dit que **X suit la loi binomiale de paramètres n et p** et on note **X suit $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.**

Remarques

- Si $n = 1$, l'expérience se résume à une épreuve de Bernoulli. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès ne prend que deux valeurs : 0 et 1. On dit alors que X suit la loi de Bernoulli.
- Pour $n \geqslant 1$, X prend toutes les valeurs entières de 0 à n.

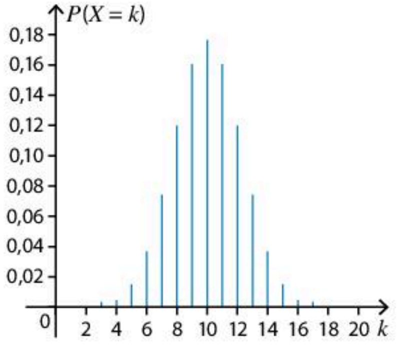
Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.

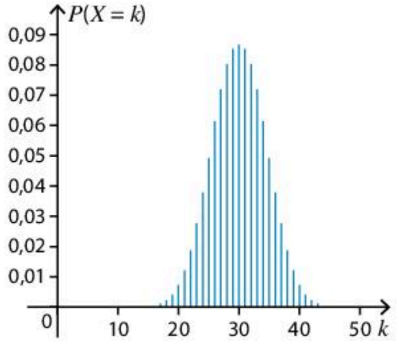
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2. Représentation graphique de la loi binomiale

Loi $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}5)$



Loi $\mathcal{B}(100\ ;\ 0{,}3)$



3. Espérance, variance et écart type d'une loi binomiale

Propriétés (admises)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;p)$. On a :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

Remarque

Si X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1\ ;\ p)$, alors $E(X) = p$.

Méthode 1 Reconnaître et utiliser la loi binomiale

On lance trois fois une pièce bien équilibrée.

- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu Pile au cours des trois lancers.

Solution commentée

On appelle Succès le fait d'obtenir Pile lors du lancer de la pièce.
Chaque lancer étant indépendant des précédents, l'expérience aléatoire qui consiste à lancer trois fois de suite la pièce est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}5$.
On appelle X la variable qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu Pile au cours des trois lancers.
La variable aléatoire X suit donc la loi $\mathscr{B}(3\ ;\ 0{,}5)$.

- $P(X=0)=\binom{3}{0}p^0(1-p)^{3-0}=0{,}5^3=0{,}125$
- $P(X=1)=\binom{3}{1}p^1(1-p)^{3-1}=3\times 0{,}5^3=0{,}375$
- $P(X=2)=\binom{3}{2}p^2(1-p)^{3-2}=3\times 0{,}5^3=0{,}375$
- $P(X=3)=\binom{3}{3}p^3(1-p)^{3-3}=0{,}5^3=0{,}125$

Méthode 2 Calculer des probabilités à la calculatrice

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8\ ;\ 0{,}3)$.

1. Déterminer à la calculatrice $P(X=2)$, $P(X\leqslant 4)$ et $P(4\leqslant X\leqslant 6)$. On arrondira au millième.
2. Déterminer l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X avec la calculatrice.
3. **a.** Déterminer la valeur approchée, arrondie à l'unité près, de $E(X)-2\sigma(X)$ et de $E(X)+2\sigma(X)$.
   b. En déduire la probabilité de l'évènement $\{E(X)-2\sigma(X)\leqslant X\leqslant E(X)+2\sigma(X)\}$.

Solution commentée

1. En utilisant une calculatrice, on trouve :
   $P(X=2)\approx 0{,}296$ arrondi à 10^{-3}.
   $P(X\leqslant 4)\approx 0{,}942$ arrondi à 10^{-3}.
   $P(4\leqslant X\leqslant 6)\approx 0{,}193$ arrondi à 10^{-3}.

2. - $E(X)=n\times p=8\times 0{,}3=2{,}4$
   - $V(X)=n\times p\times(1-p)=8\times 0{,}3\times 0{,}7\approx 0{,}168.$
   - $\sigma(X)=\sqrt{0{,}168}\approx 0{,}410$

3. **a.** On a $E(X)-2\sigma(X)\approx 2$ et $E(X)+2\sigma(X)\approx 3$.
   b. On a donc :
$$P(E(X)-2\sigma(X)\leqslant X\leqslant E(X)+2\sigma(X))\approx 0{,}55.$$

6. Loi géométrique

1. Définition et caractéristiques

Définition

Soit p un réel appartenant à $[0 ; 1]$.
On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p. On répète l'épreuve de Bernoulli de manière indépendante.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de répétitions nécessaires pour obtenir le premier succès. On dit que la variable aléatoire X suit la **loi géométrique de paramètre p** et on note **X suit $\mathcal{G}(p)$.**

Remarques

La variable X peut prendre toutes les valeurs entières $k \geqslant 1$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Pour tout entier naturel non nul k, $P(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1}$.

DÉMONSTRATION

On répète l'épreuve de Bernoulli jusqu'à l'obtention du premier succès. Avant le premier succès, il y a eu $k - 1$ échecs. Comme les répétitions sont indépendantes, on effectue le produit des probabilités des $k - 1$ échecs et du succès.

Propriété : Loi sans mémoire

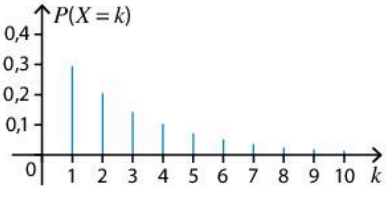
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Pour tous entiers naturels k et ℓ non nuls, on a $P_{(X > k)}(X > k + \ell) = P(X > \ell)$.

Remarque

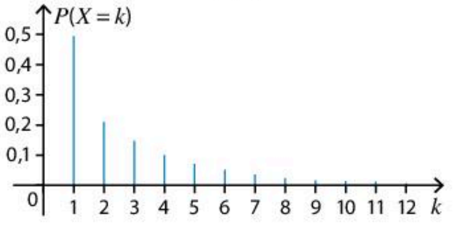
On dit que X est sans mémoire. Cela signifie que la probabilité que X prenne des valeurs supérieures à $k + \ell$ sachant que X prend des valeurs supérieures à k ne dépend pas de k mais seulement de ℓ.

2. Représentation graphique

$\mathcal{G}(0{,}3)$



$\mathcal{G}(0{,}5)$



3. Espérance, variance et écart type d'une loi géométrique

Propriétés

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$ et par conséquent $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dfrac{\sqrt{1-p}}{p}$.

Méthode 1 Calculer des probabilités avec une loi géométrique

Au basket, un joueur réussit 38 % de ses lancers francs. Les lancers sont supposés indépendants.
On s'intéresse au nombre de lancers avant de marquer un panier.

1. Montrer que l'on peut modéliser la situation par une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
2. Quelle est la probabilité qu'il réussisse son premier panier au quatrième essai ?
3. Il a droit à quatre essais. Quelle est la probabilité qu'il réussisse un panier avant son quatrième essai ?

Solution commentée

1. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès l'évènement « Marquer un panier » de probabilité $p = 0{,}38$. Comme chaque lancer est indépendant du ou des précédents, la variable aléatoire X égale au nombre d'essais jusqu'à ce que le joueur marque un panier suit la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}38)$.

2. La probabilité qu'il réussisse son premier panier au quatrième essai est :
$$P(X = 4) = (1 - 0{,}38)^3 \times 0{,}38 \approx 0{,}091.$$

3. Le joueur a pu réussir dès le premier essai, ou au second ou au troisième essai.
$P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}38 + 0{,}62 \times 0{,}38 + 0{,}62^2 \times 0{,}38 \approx 0{,}762$

Méthode 2 Modéliser par une loi géométrique

En septembre 2019, on peut lire dans le journal anglais *The Sunday Mirror* : « En Ecosse, la famille B., après 10 naissances de garçons, a eu le bonheur d'avoir une fille, Cameron. »
On suppose que lors des naissances d'enfants dans une famille, la probabilité d'avoir une fille ou un garçon est la même et ne dépend pas des enfants nés précédemment.

1. Montrer que l'on peut modéliser cette situation par une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique.
2. Quelle est la probabilité que, parmi les naissances au sein d'une famille, la première fille soit le onzième enfant ?

Solution commentée

1. Comme les naissances fille/garçon peuvent être considérées comme équiprobables, et que les naissances successives sont indépendantes, on peut modéliser cette situation par la loi géométrique $\mathcal{G}(0{,}5)$.

2. Soit X la variable qui compte le nombre de naissances qu'il faut attendre dans une famille avant d'avoir une fille. La probabilité cherchée est alors $P(X = 11) = 0{,}5^{10} \times 0{,}5 = 0{,}5^{11} \approx 0{,}0005$.

Méthode 3 Utiliser la loi sans mémoire

Un jeu de dé consiste à lancer un dé jusqu'à obtenir un 6. Un joueur a déjà lancé son dé dix fois sans obtenir de 6.

- Quelle est la probabilité qu'il sorte au moins au treizième lancer ?

Solution commentée

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé. L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Si on considère le succès « Obtenir un 6 », on a alors une épreuve de Bernoulli. La répétition de manière indépendante des lancers du dé est un schéma de Bernoulli. Soit X la variable qui compte le nombre de lancers jusqu'à obtenir un 6. La variable aléatoire X suit une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.
On sait que le 6 n'est pas sorti lors des dix premiers lancers.
La probabilité que le 6 sorte au moins au treizième lancer est :
$$P_{(X>10)}(X > 12) = P(X > 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{7}{6} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{23}{36} \approx 0{,}639$$
Après avoir lancé sans succès le dé dix fois, la probabilité que le 6 sorte au moins au treizième lancer est égale à la probabilité que le 6 sorte au moins au troisième lancer.