MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 7

PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. Équation différentielle $y' = f$ et primitive

1. Définition de l'équation différentielle $y' = f$

Définitions

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- On dit qu'une fonction F est **solution de l'équation différentielle $y' = f$** sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.
- **Résoudre sur I l'équation différentielle $y' = f$**, c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$.

Exemple

Soit (E) l'équation différentielle $y' = x^2$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$, donc F est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. Primitive d'une fonction

Définition

Une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple

La fonction $F : x \mapsto 4x + 1$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 4$ sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = 4 = f(x)$.

Remarque

F est une primitive de f sur I si et seulement si F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Résoudre sur I l'équation $y' = f$ revient donc à déterminer toutes les primitives de f sur I.

Propriété (admise)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriété

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et G une primitive de f sur I.
Les primitives de f sur I (c'est-à-dire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$) sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + C$, où C est une constante réelle.

Exemple

La fonction exponentielle est une primitive de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, car $\exp' = \exp$.
Les primitives de la fonction exponentielle sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^x + C$, où C est une constante réelle.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

Méthode 1 Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différenti

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 5$; $(E) : y' = 3x^2 - 4x + 1$.
2. $f : x \mapsto (x-1)e^x$; $(E) : y' = xe^x$.

Solution commentée

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 2 \times 2x + 1 = 3x^2 - 4x + 1$, donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme uv avec $u(x) = x - 1$; $v(x) = e^x$; $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.
Donc $f' = u'v + v'u$ et $f'(x) = 1e^x + (x-1)e^x = xe^x$, donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 Vérifier qu'une fonction est une primitive

Soit la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$.
On admet que F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
- Vérifier que F est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$.

Solution commentée

Pour vérifier que F est une primitive de f, il suffit de dériver F.

$F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) = f(x)$.

Ainsi, $F' = f$ et F est bien une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

Méthode 3 Déterminer les primitives d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 7$.

1. Vérifier que la fonction G, définie par $G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 2.

Solution commentée

1. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{3 \times 2x}{2} + 7 = x^2 - 3x + 7 = f(x)$.
Donc G est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. G est une primitive de f, donc l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x + C$, où C est une constante réelle.

3. $F(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2^3}{3} - \frac{3 \times 2^2}{2} + 7 \times 2 + C = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} - 6 + 14 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{32}{3}$
Donc $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x - \frac{32}{3}$.

2. Primitives et opérations

1. Primitives des fonctions de référence

Fonction $f : x \mapsto \dots$	Une primitive $F : x \mapsto \dots$	Sur l'intervalle :
a (constante réelle)	ax	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ et $n \neq -1$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ si $n < -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Remarque

On obtient ce tableau par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions de référence.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^4$. $f(x) = x^n$, avec $n = 4$, donc la fonction $F : x \mapsto \dfrac{x^5}{5}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété

Soient f et g deux fonctions admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur un intervalle I.

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

Remarque

Contrairement à la dérivation, il n'existe aucune formule permettant de calculer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions.

3. Primitives et composition

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f de la forme…	Une primitive F :	Conditions
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n < -1$, $u(x) \neq 0$ pour tout x de I.
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I.
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$	$u(x) > 0$ pour tout x de I ou $u(x) < 0$ pour tout x de I.
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I.
$u'e^u$	e^u	
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	v est une fonction dérivable sur J et $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

Méthode 1 Déterminer des primitives à l'aide des fonctions de référence

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x)=x^4-2x^2-2$ et $I=\mathbb{R}$.
2. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ et $I=]0\,;+\infty[$.

Solution commentée

1. Pour tout entier naturel $n\neq 0$, une primitive sur I de la fonction $x\mapsto x^n$ est $x\mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$, donc $x\mapsto \frac{x^5}{5}$ est une primitive de $x\mapsto x^4$ et $x\mapsto\frac{x^3}{3}$ est une primitive de $x\mapsto x^2$.
Par ailleurs, une primitive sur I de la fonction $x\mapsto -2$ est la fonction $x\mapsto -2x$.
Donc la fonction F, définie par $F(x)=\frac{x^5}{5}-2\frac{x^3}{3}-2x$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+x^{-3}$. Une primitive sur I de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est la fonction $x\mapsto\ln(x)$.
$x\mapsto -\frac{1}{x^2}$ est la dérivée de $x\mapsto\frac{1}{x}$. Donc une primitive sur I de $x\mapsto -\frac{1}{x^2}$ est $x\mapsto\frac{1}{x}$.
Par ailleurs, pour tout entier $n<-1$, une primitive sur I de la fonction $x\mapsto x^n$ est $x\mapsto\frac{x^{n+1}}{n+1}$, donc $x\mapsto\frac{x^{-2}}{-2}$ est une primitive de $x\mapsto x^{-3}$ sur I.
Donc la fonction F, définie par $F(x)=\ln(x)+\frac{1}{x}-\frac{x^{-2}}{2}=\ln(x)+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$, est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 8 p. 226

Méthode 2 Reconnaître la forme d'une fonction pour déterminer une primitive

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x)=2x\left(x^2+1\right)^4$ et $I=\mathbb{R}$.
2. $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^3}$ et $I=]1\,;+\infty[$.
3. $f(x)=\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}$ et $I=\mathbb{R}$.

Solution commentée

1. On reconnaît la forme $u'u^n$, avec $u(x)=x^2+1$ et $u'(x)=2x$. On a $f=u'u^4$, donc la fonction F définie par $F=\frac{u^5}{5}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a donc : $F(x)=\frac{(x^2+1)^5}{5}$.

2. $f(x)=(2x-1)^{-3}$ et on reconnaît la forme $u'u^n$ avec $u(x)=2x-1$ et $u'(x)=2$.
$f=\frac{1}{2}u'u^{-3}$, donc la fonction F, définie par $F=\frac{1}{2}\times\frac{u^{-2}}{-2}$, est une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$.
On a donc : $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(2x-1)^{-2}}{-2}=-\frac{1}{4(2x-1)^2}$.

3. On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=e^{3x}+1$ et $u'(x)=3e^{3x}$.
De plus, pour tout nombre réel x, $u(x)>0$.
$f=\frac{1}{3}\frac{u'}{u}$ donc la fonction F définie par $F=\frac{1}{3}\times\ln(u)$ est une primitive de f sur I.
On a donc : $F(x)=\frac{1}{3}\times\ln\left(e^{3x}+1\right)$.

3. Équations différentielles

1. Solution d'une équation différentielle

Définitions

- Une **équation différentielle** est une égalité reliant une fonction dérivable et sa dérivée.
- Une **solution d'une équation différentielle** est une fonction qui vérifie cette égalité.

Exemple

On considère l'équation différentielle $y' = 2y$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ est une solution de cette équation différentielle, car $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} = 2f(x)$.

2. Résolution d'équations différentielles

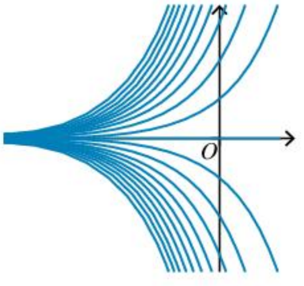
Propriété (équation différentielle $y' = ay$)

Soit a un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

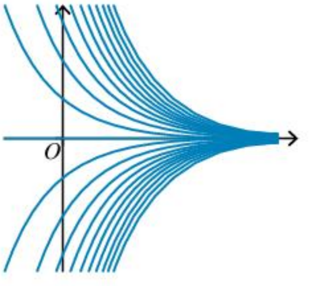
Remarques

- Soit a un réel non nul fixé. Les courbes des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ ont les allures suivantes.

Si $a > 0$



Si $a < 0$



- Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation $y' = ay$, alors les fonctions $f + g$ et kf (où k est un réel) sont également solutions de cette équation.

Propriétés (équation différentielle $y' = ay + b$)

Soient a et b deux nombres réels non nuls. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$.

- (E) admet une unique solution particulière constante, qui est la fonction $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$.
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.
- Quels que soient les nombres réels x_0 et y_0, l'équation (E) admet une unique solution g vérifiant la condition initiale $g(x_0) = y_0$.

Exemple

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' = y + 1$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{x} - 1$.
Soit g la seule solution de (E) vérifiant $g(0) = 1$.
$g(x) = C\mathrm{e}^{x} - 1$ et $g(0) = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{0} - 1 = 1 \Leftrightarrow C = 2$. Donc $g(x) = 2\mathrm{e}^{x} - 1$.

Propriété (équation différentielle $y' = ay + f$)

Soient a un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient (E) l'équation différentielle $y' = ay + f$ et g une solution particulière de (E) sur I.
Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} + g(x)$, où C est une constante réelle.

Méthode 1 Vérifier qu'une fonction est solution particulière d'une équation différentielle

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction h est une solution particulière de l'équation (E).

1. $h(x) = \mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}}$ et $(E) : 6y' + 8y = 0$.
2. $h(x) = \mathrm{e}^{3x+1} - 2$ et $(E) : y' = 3y + 2$.

Solution commentée

1. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}}$, d'où :

$6h'(x) + 8h(x) = 6 \times \left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}}\right) + 8\mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}} = -8\mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}} + 8\mathrm{e}^{\frac{1-4x}{3}} = 0$, donc h est une solution particulière de (E).

2. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 3\mathrm{e}^{3x+1}$.
$3h(x) + 2 = 3\left(\mathrm{e}^{3x+1} - 2\right) + 6 = 3\mathrm{e}^{3x+1}$, donc $h'(x) = 3h(x) + 2$ et h est une solution particulière de (E).

Méthode 2 Résoudre des équations différentielles

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $(E_1) : y' = 5y$
2. $(E_2) : 4y' + 3y = 0$
3. $(E_3) : y' = -y + 2$

Solution commentée

1. L'équation (E_1) est du type $y' = ay$, donc les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = C\mathrm{e}^{5x}$, où C est une constante réelle.

2. $(E_2) \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{4}y$. C'est une équation du type $y' = ay$, donc les solutions de l'équation (E_2) sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x}$, où C est une constante réelle.

3. L'équation (E_3) est du type $y' = ay + b$, donc les solutions de l'équation (E_3) sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = C\mathrm{e}^{-x} + 2$, où C est une constante réelle.

Méthode 3 Résoudre une équation différentielle avec une condition initiale

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x$.

1. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - 2$ est solution de l'équation (E).
2. En déduire toutes les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'unique solution h de (E) telle que $h(2) = 0$.

Solution commentée

1. $g'(x) = -1$, donc $g'(x) - \frac{1}{2}g(x) = -1 - \frac{1}{2}(-x-2) = \frac{1}{2}x$, donc g est solution de (E).

2. $(E) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x$. (E) est une équation de la forme $y' = ay + f$ dont g est une solution particulière, donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + g(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - x - 2$, où C est une constante réelle.

3. $h(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - x - 2$. Par ailleurs, $h(2) = 0 \Leftrightarrow C\mathrm{e} - 4 = 0 \Leftrightarrow C = \frac{4}{\mathrm{e}}$.

Ainsi $h(x) = \frac{4}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - x - 2 = 4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x-1} - x - 2$.