MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 8

Lois de probabilités à densité

Connaître le cours

1. Notion de densité

1. Variable aléatoire à densité

Définition

Soit X une variable aléatoire. Lorsque l'ensemble des valeurs possibles de X contient un intervalle, on dit que X est une **variable aléatoire continue**.

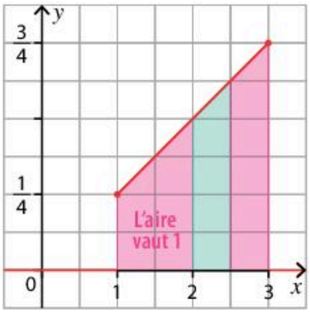
Définition

Soit X une variable aléatoire continue. On dit que **X est de densité f** lorsque :
- il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, positive et continue sur un intervalle I appelé support de f et nulle en dehors de I, telle que l'aire totale sous la courbe représentative de f est égale à 1.
- pour tout intervalle $[a\,;\,b]$ inclus dans I, la probabilité de l'évènement $\{X \in [a\,;\,b]\}$ est :

$$P(X \in [a\,;\,b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

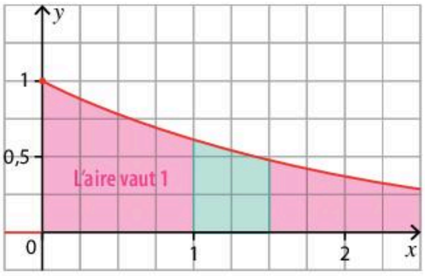
Exemples

- X est une variable aléatoire de densité f sur $[1\,;\,3]$. f est continue et positive sur $I = [1\,;\,3]$ et nulle en dehors.



$$P(X \in [2\,;\,2{,}5]) = \int_2^{2{,}5} f(x)\mathrm{d}x = \frac{4{,}5}{16}$$

- X est une variable aléatoire de densité f sur $[0\,;\,+\infty[$. f est continue et positive sur $I = [0\,;\,+\infty[$ et nulle en dehors.



$$P(X \in [1\,;\,1{,}5]) = \int_1^{1{,}5} f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque

Pour tout réel a, $P(X = a) = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ et donc $P(X \leqslant a) = P(X < a)$.

2. Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire de densité f.
On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F définie pour tout réel t par :

$$F(t) = P(X \leqslant t).$$

Propriété (admise)

Soit X une variable aléatoire de densité f.
- Pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a),$$

où F est la fonction de répartition de X.
- En tout point t où la fonction de répartition F est dérivable, $F'(t) = f(t)$.

Méthode 1 Vérifier qu'une fonction est une fonction de densité

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions de densité ?

1 f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x}{9} \text{ si } x \in [0\ ;\ 3] \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

2 g définie par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{2x}{3} \text{ si } x \in [-1\ ;\ 2] \\ g(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Solution commentée

Il s'agit de vérifier que chacune des conditions de la définition est bien vérifiée. En revanche, il suffit qu'une seule ne soit pas vérifiée pour que ce ne soit pas une fonction de densité de probabilité.

1 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et positive.
La fonction f est bien continue sur l'intervalle $I = [0\ ;\ 3]$ (c'est ici une fonction linéaire).
Il reste à vérifier que l'aire sous la courbe vaut 1 : $\int_0^3 \dfrac{2x}{9}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{9}\right]_0^3 = \dfrac{3^2}{9} - \dfrac{0^2}{9} = \dfrac{9}{9} = 1$.
Toutes les conditions de la définition étant satisfaites, f est bien une fonction de densité de probabilité.

2 La fonction g n'est pas toujours positive. En effet on a par exemple $g(-0{,}5) = \dfrac{-1}{3}$ qui est négatif. Une des conditions n'étant pas satisfaite, g n'est pas une fonction de densité de probabilité.

Méthode 2 Calculer une probabilité dans le cas d'une variable aléatoire de densité f

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par $\begin{cases} f(x) = -x \text{ si } x \in [-1\ ;\ 0] \\ f(x) = x \text{ si } x \in\ ]0\ ;1] \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

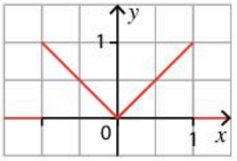
1 Tracer la représentation graphique de la fonction f.

2 Calculer les probabilités suivantes.

a. $P(-0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$ **b.** $P(X > 1)$ **c.** $P(X \leqslant 1)$ **d.** $P(0 \leqslant X \leqslant 2)$

Solution commentée

1



2 **a.** Par définition, $P(-0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-0{,}5}^{0{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-0{,}5}^{0} -x\,\mathrm{d}x + \int_0^{0{,}5} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-0{,}5}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{0{,}5} = \left(0 - \frac{-(-0{,}5)^2}{2}\right) + \left(\frac{(0{,}5)^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}$$

Remarque : on pouvait aussi calculer l'aire sous la courbe qui est constituée de deux triangles rectangles isocèles : $P(-0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}5) = 2 \times \dfrac{0{,}5 \times 0{,}5}{2} = 0{,}25$.

b. La densité étant nulle sur $]1\ ;\ +\infty[$, l'aire sous la courbe de f est nulle : $P(X > 1) = 0$. Autrement dit, l'évènement $\{X > 1\}$ est un évènement impossible, donc $P(X > 1) = 0$.

c. 1 étant la valeur la plus grande possible pour X (puisque la densité est nulle sur $]1\ ;\ +\infty[$), il est certain que X prenne une valeur inférieure à 1. $\{X \leqslant 1\}$ est un événement certain, donc $P(X \leqslant 1) = 1$.

d. Par définition, $P(0 \leqslant X \leqslant 2) = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 0 = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}$

2. Paramètres d'une variable aléatoire à densité

1. Espérance

Définition

Soit X une variable aléatoire continue de densité f de support $I=[a\ ;\ b]$.

L'**espérance de** X est $E(X)=\int_a^b x\ f(x)\mathrm{d}x$.

Remarques

- Si $I=]-\infty\ ;\ b]$, alors $E(X)=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b x\ f(x)\mathrm{d}x$.
- Si $I=[a\ ;\ +\infty[$, alors $E(X)=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b x\ f(x)\mathrm{d}x$.

L'espérance est un **paramètre de position**. L'espérance est une valeur théorique et peut être interprétée comme la moyenne (théorique) des valeurs observées de X sur un nombre « infini » d'observations.

Exemple

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f définie par $\begin{cases} f(x)=0{,}1 \text{ si } x\in[0\ ;10] \\ f(x)=0 \text{ sinon}\end{cases}$.

On a $E(X)=\int_0^{10} x\ f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{10}0{,}1x\mathrm{d}x=\left[\frac{0{,}1x^2}{2}\right]_0^{10}=\frac{0{,}1\times 10^2}{2}=5$.

2. Variance et écart type

Définition

Soit X une variable aléatoire continue de densité f de support $I=[a\ ;\ b]$.

La **variance** de X est :

$$V(X)=\int_a^b (x-E(X))^2\ f(x)\mathrm{d}x.$$

L'**écart type** de X est :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}.$$

Remarques

- Si $I=]-\infty\ ;\ b]$, alors $V(X)=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b (x-E(X))^2\ f(x)\mathrm{d}x$.
- Si $I=[a\ ;\ +\infty[$, alors $E(X)=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b (x-E(X))^2\ f(x)\mathrm{d}x$.

La variance et l'écart type sont des **paramètres de dispersion**. La variance est une valeur théorique correspondant à la variance des valeurs observées de X sur un nombre « infini » d'observations.

Exemple

Soit X une variable aléatoire de densité f définie pour tout réel x par :

$$\begin{cases} f(x)=-2x \text{ si } x\in[-1\ ;\ 0] \\ f(x)=0 \text{ sinon}\end{cases}.$$

On a $E(x)=\int_{-1}^0 x(-2x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 -2x^2\mathrm{d}x=\left[-\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^0=-\frac{2}{3}$.

Donc $V(X)=\int_{-1}^0\left(x+\frac{2}{3}\right)^2(-2x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\left(-2x^3-\frac{8}{3}x^2-\frac{8}{9}x\right)\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^4}{2}-\frac{8}{9}x^3-\frac{4}{9}x^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{18}$.

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{1}{\sqrt{18}}$.

Méthode 1 Calculer une espérance et un écart type

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f définie par $\begin{cases} f(x) = -x \text{ si } x \in [-1\ ;\ 0] \\ f(x) = \frac{x}{2} \text{ si } x \in]0\ ;\ 2] \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

• Calculer l'espérance et l'écart type de X.

Solution commentée

• La densité est définie et non nulle sur l'intervalle $I = [-1\ ;\ 2]$.

On a donc $E(X) = \int_{-1}^{2} x\ f(x)\mathrm{d}x$. La densité étant définie par morceaux, cette intégrale se calcule en deux temps :

$$E(X) = \int_{-1}^{0} x(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} -x^2\mathrm{d}x + \int_{0}^{2}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{6}\right]_{0}^{2} = 0 - \left(-\frac{(-1)^3}{3}\right) + \frac{2^3}{6} - 0 = 1$$

La moyenne théorique des valeurs de X est 1.

• Pour calculer l'écart type, il faut tout d'abord calculer la variance : On a

$$V(X) = \int_{-1}^{2}(x-1)^2\ f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - 2x + 1\right)\times(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2}\left(x^2 - 2x + 1\right)\frac{x}{2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(-x^3 + 2x^2 - x\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2}\left(\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_{0}^{2}$$

$$= 0 - \left(-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{2}{3}(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \frac{2^4}{8} - \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{4} - 0 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{16}{8} - \frac{8}{3} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$$

L'écart type est donc $\sigma(X) = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Méthode 2 Calculer une espérance lorsque l'intervalle n'est pas borné

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = \frac{3}{x^4}$ pour tout réel $x \geqslant 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Calculer $E(X)$.
2. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution commentée

1. On a $E(X) = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} x\ f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} x \times \frac{3}{x^4}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{3}{x^3}\mathrm{d}x$.

Or $\frac{3}{x^3} = 3x^{-3}$, donc $\int_{1}^{b}\frac{3}{x^3}\mathrm{d}x = \left[\frac{3x^{-2}}{-2}\right]_{1}^{b} = \left[-\frac{3}{2x^2}\right]_{1}^{b} = -\frac{3}{2b^2} + \frac{3}{2}$.

On en déduit $E(X) = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{3}{2b^2} + \frac{3}{2}\right) = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

2. $V(X) = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}(x - E(X))^2\ f(x)\mathrm{d}x$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2\frac{3}{x^4}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{3x^2 - 9x + \frac{27}{4}}{x^4}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{9}{x^3} + \frac{27}{4x^4}\right)\mathrm{d}x$$

Or $\int_{1}^{b}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{9}{x^3} + \frac{27}{4x^4}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} - \frac{9}{4x^3}\right]_{1}^{b} = -\frac{3}{b} + \frac{9}{2b^2} - \frac{9}{4b^3} + 3 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = -\frac{3}{b} + \frac{9}{2b^2} - \frac{9}{4b^3} + \frac{3}{4}$.

Donc $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{9}{x^3} + \frac{27}{4x^4}\right)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{-9}{4b^3} + \frac{9}{2b^2} - \frac{3}{b} + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$. On en déduit que $V(X) = \frac{3}{4}$.

Enfin, on a $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Connaître le cours

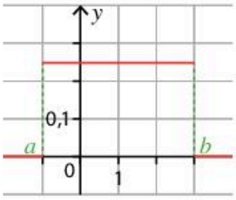
3. Loi uniforme sur $[a\ ;b]$

1. Définition d'une loi uniforme sur un intervalle

Définition et propriété

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ si sa fonction de densité f est constante sur $[a\ ;\ b]$.

On a alors $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ pour tout réel $x \in [a\ ;\ b]$ et $f(x)=0$ sinon.



Remarques

Lorsqu'une variable aléatoire suit une loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, on note X **suit** $\mathcal{U}$ **(**$[a\ ;b]$**)**.
La loi uniforme permet de modéliser des temps d'attente sur des intervalles de temps connus.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Pour tout intervalle $[c\ ;\ d]$ inclus dans $[a\ ;\ b]$, on a $P(X \in [c\ ;\ d])=\dfrac{d-c}{b-a}$.

Exemple

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[-2\ ;\ 3]$. On a $P(-1 \leqslant X \leqslant 2)=\dfrac{2-(-1)}{3-(-2)}=\dfrac{3}{5}$.

Propriété (admise)

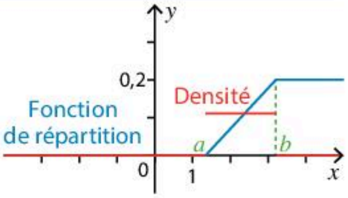
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

La fonction de répartition de X est la fonction F définie par $\begin{cases} F(t)=0 \text{ si } t<a \\ F(t)=\dfrac{t-a}{b-a} \text{ si } t \in [a\ ;\ b] \\ F(t)=1 \text{ si } t>b \end{cases}$

Remarque

Pour déterminer F sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, on calcule $F(t)=P(X \leqslant t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$.

Représentation graphique de F



Exemple

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

La fonction de répartition est définie pour tout réel t par $\begin{cases} F(t)=0 \text{ si } t<0 \\ F(t)=t \text{ si } t \in [0\ ;\ 1]. \\ F(t)=1 \text{ si } t>1 \end{cases}$

2. Espérance et variance d'une loi uniforme

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;b]$.

- $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$
- $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
- $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Remarque

L'espérance de la variable aléatoire X est la valeur du milieu de l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Méthode 1 Calculer des probabilités avec une loi uniforme

On considère une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\ ;\ 11]$.

1. Calculer la probabilité de l'évènement $\{X \leqslant 3\}$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $\{X \geqslant 7\}$.
3. Calculer la probabilité de l'évènement $\{8 \leqslant x \leqslant 9\}$.

Solution commentée

1. $P(X \leqslant 3) = P(X \in [0\ ;\ 3]) = \dfrac{3}{11-1} = 0{,}3$

2. $P(X > 7) = P(X \in]7\ ;\ 11]) = \dfrac{11-7}{11-1} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

3. $P(8 \leqslant x \leqslant 9) = \dfrac{9-8}{11-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

Méthode 2 Déterminer la fonction de répartition d'une loi uniforme

1. Déterminer l'expression de la fonction de répartition F de la variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$.
2. En déduire les probabilités suivantes :

a. $P(X \leqslant 0)$; **b.** $P(-1 < X < 3)$; **c.** $P(X \geqslant 1)$.

Solution commentée

1. La fonction de densité de X est la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{6-(-4)} = \dfrac{1}{10}$ pour tout $x \in [-4\ ;\ 6]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Donc, pour tout réel t appartenant à l'intervalle $]-\infty\ ;\ -4[$, $F(t) = 0$.

Sur l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$, $F(t) = \int_{-4}^{t} f(x)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{10}x\right]_{-4}^{t} = \left(\dfrac{t}{10} - \dfrac{(-4)}{10}\right) = \dfrac{t+4}{10}$.

Sur l'intervalle $]6\ ;\ +\infty[$, $F(t) = 1$.

2. **a.** $P(X \leqslant 0) = P(X \in [-4\ ;\ 0]) = F(0) - F(-4) = \dfrac{4}{10} - 0 = \dfrac{4}{10}$

b. $P(-1 < X < 3) = P(X \in]-1\ ;\ 3[) = F(3) - F(-1) = \dfrac{7}{10} - \dfrac{3}{10} = \dfrac{4}{10}$

c. $P(X \geqslant 1) = P(X \in [1\ ;\ 6]) = F(6) - F(1) = 1 - \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

Méthode 3 Modéliser et utiliser une loi uniforme

Léa va passer chez Maelys entre 18 h et 20 h 30. Maelys quant à elle, regarde chaque soir son émission préférée qui commence à 19 h et se termine à 19 h 45. On considère que Léa peut arriver n'importe quand entre 18 h et 20 h 30.

- Quelle est la probabilité que Léa dérange Maelys pendant qu'elle regarde son émission préférée ?

Solution commentée

Soit X la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée de Léa chez Maelys. En convertissant les heures en heures décimales, les valeurs prises par la variable aléatoire X appartiennent à l'intervalle $I = [18\ ;\ 20{,}5]$.
Comme Léa peut arriver n'importe quand entre 18 h et 20 h 30, on peut considérer que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle I.
On cherche à calculer $P(X \in [19\ ;\ 19{,}75])$.

$P(X \in [19\ ;\ 19{,}75]) = \dfrac{19{,}75-19}{20{,}5-18} = 0{,}3$

La probabilité que Léa dérange Maelys est de 30 %.

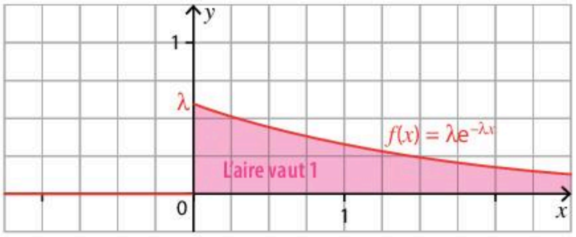
4. Loi exponentielle

1. Définition d'une loi exponentielle

Définition

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire X suit la loi **exponentielle** de paramètre λ si sa fonction de densité f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$



Remarques

- On note X **suit la loi** $\mathscr{E}(\lambda)$.
- Cette loi permet de modéliser une durée de vie de certains phénomènes dits « sans mémoire » ou « sans vieillissement » ou « sans usure » comme par exemple la durée de vie d'un composant électronique.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tous s et t positifs, on a :

$$P_{X>t}(X > t+s) = P(X > s)$$

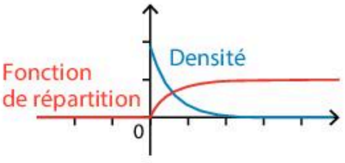
Remarque

Cette propriété caractérise les phénomènes « sans mémoire ». Par exemple, la désintégration d'un atome est un phénomène sans mémoire : la probabilité qu'un atome ne soit pas désintégré à l'instant $t+s$ sachant qu'il n'était pas désintégré à l'instant t est la même que la probabilité qu'il ne soit pas désintégré à l'instant s.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
La fonction de répartition de X est la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ si } t \geqslant 0 \\ F(t) = 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$



2. Espérance et variance d'une loi exponentielle

Propriété (admise)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

Méthode 1 Calculer une probabilité avec la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

• Calculer $P(-2 \leqslant X \leqslant 2)$ et $P(X \geqslant 2)$.

Solution commentée

1^re^ méthode à l'aide de la fonction de répartition

La fonction de répartition de la loi exponentielle est la fonction F définie par $\begin{cases} F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ F(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

• $P(-2 \leqslant X \leqslant 2) = F(2) - F(-2) = \left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) - 0 = 1 - \mathrm{e}^{-2}$

• $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) = \mathrm{e}^{-2}$

2^e^ méthode par le calcul d'une intégrale

• $P(X \in [-2\,;\,2]) = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2$

$= -\mathrm{e}^{-2} - \left(-\mathrm{e}^{0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-2}$

• $P(X \geqslant 2) = P(X \in [2\,;\,+\infty[)$. On cherche donc à calculer l'aire sous la courbe sur un domaine infini, soit $[2\,;\,+\infty[$.

On calcule $P(X \in [2\,;\,A])$, où $A > 2$, puis on cherche la limite quand A tend vers $+\infty$.

$P(X \in [2; A]) = \int_{2}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{A} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_2^A = \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-A}$

On sait que $\lim\limits_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-A} = 0$.

On a donc $P(X \in [2\,;\,+\infty[) = \lim\limits_{A \to +\infty} P(X \in [2\,;\,A]) = \lim\limits_{A \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-A}\right) = \mathrm{e}^{-2}$.

On a donc $P(X \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-2}$.

Méthode 2 Méthode 2 Modéliser par une loi exponentielle

Une enquête menée par les dirigeants d'un grand magasin permet d'affirmer que la durée moyenne entre l'arrivée de deux clients est de sept minutes. On admet que cette situation peut se modéliser par une loi exponentielle.

• Hugo se présente dans ce magasin. Quelle est la probabilité qu'un autre client se présente moins de cinq minutes après lui ?

Solution commentée

On note X la vatriable aléatoire égale à la durée entre l'arrivée de deux clients. Les valeurs possibles de X appartiennent à l'intervalle $I = [0\,;\,+\infty[$.

On modélise par une loi exponentielle.

Le temps d'attente moyen est de sept minutes. Or, si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Donc $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 7$, soit $\lambda = \frac{1}{7}$.

X suit donc la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{7}$.

On cherche alors $P(X \in [0\,;\,5])$.

On a $P(X \in [0\,;\,5]) = \int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{5} \frac{1}{7}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{7}}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x}{7}}\right]_0^5 = -\mathrm{e}^{-\frac{5}{7}} - \left(-\mathrm{e}^{0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{5}{7}} \approx 0{,}51$.

Il y a environ 51 % de chance que le client suivant se présente moins de cinq minutes après Hugo.

Remarque : On aurait pu aussi utiliser directement l'expression de la fonction de répartition F.