COURS HACHETTE

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 8

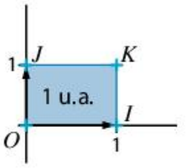
CALCUL INTEGRAL

1. Intégrale d'une fonction continue et positive

1. Aire sous la courbe d'une fonction continue et positive

Définition

Soit un repère orthogonal $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ et soit K le point de coordonnées (1 ; 1).
L'aire du rectangle $OIKJ$ est appelée **unité d'aire** du repère et est notée u.a.

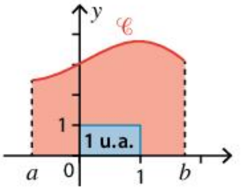


Exemple

Si $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors 1 u.a. = 6 cm^2.

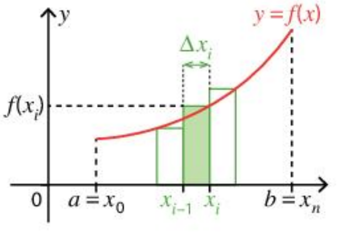
Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est appelée **intégrale de a à b de la fonction f**. Elle est notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarques

- Le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend que de a, b et f. On dit que x est une variable **muette**. On peut également écrire ce nombre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$, etc. a et b sont les **bornes** de l'intégrale.
- La méthode des rectangles (p. 242) permet le calcul approché d'une intégrale. Elle légitime la notation utilisée : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ($\int$ ressemble à un « S » et peut se lire « somme »). L'approximation, par des aires de rectangles, vaut $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, Δx_i étant la largeur des rectangles et $f(x_i)$ leur hauteur. Cette somme tend vers $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$.



2. Théorème fondamental

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction F est la primitive de f sur $[a\,;b]$ qui s'annule en a.

Propriété (corollaire)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. Ce nombre peut aussi se noter $[F(t)]_a^b$.

Remarques

- Le théorème justifie, dans le cas d'une fonction continue et positive, l'existence de primitives.
- La propriété permet de calculer l'aire sous la courbe d'une fonction f continue et positive grâce à une primitive de f.
- Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie pour f.

Méthode 1 Calculer des intégrales simples

Dans chaque cas, calculer l'intégrale donnée en s'appuyant sur une représentation graphique.

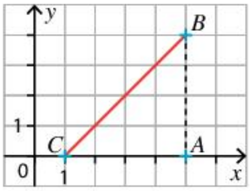
1 $\int_1^5 (x-1)\,dx$

2 $\int_{-2}^8 4\,dx$

Solution commentée

1 Soit f la fonction définie sur $[1;5]$ par $f(x) = x-1$.

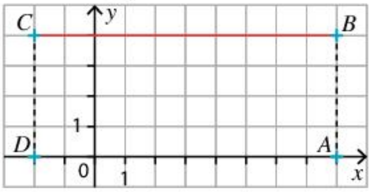
Si $1 \leqslant x \leqslant 5$, alors $x-1 \geqslant 0$, donc f est bien une fonction continue et positive sur $[1;5]$. Donc $\int_1^5 (x-1)\,dx$ est l'aire sous la courbe de f entre 1 et 5. C'est donc l'aire du triangle rectangle ABC.



$AC = 4$ et, comme B est le point de la courbe représentative de f d'abscisse 5, $B(5;4)$.

On a $AB = 4$. Donc l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{AC \times AB}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$ u.a., donc $\int_1^5 (x-1)\,dx = 8$.

2 La fonction g définie sur $[-2;8]$ par $g(x) = 4$ est continue et positive, donc $\int_{-2}^8 4\,dx$ est l'aire sous la courbe de g entre -2 et 8.
Cette aire est l'aire du rectangle $ABCD$, elle est donc égale à :
$10 \times 4 = 40$ u.a., donc $\int_{-2}^8 4\,dx = 40$.



EXERCICE 3 p. 258

Méthode 2 Calculer l'aire sous la courbe d'une fonction continue et positive

Soit f la fonction définie sur $[-4;1]$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

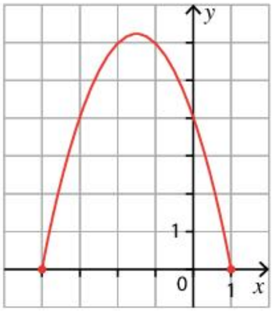
1 Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé d'unité 0,5 cm.

2 Étudier le signe de $f(x)$ sur $[-4;1]$.

3 Calculer l'aire sous la courbe de f entre -4 et 1, en centimètre carré.

Solution commentée

1 Voir ci-contre.



2 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 25$, donc $f(x)$ a deux racines : $\frac{3+5}{-2} = -4$ et $\frac{3-5}{-2} = 1$.

$a = -1 < 0$. Donc $f(x)$ est positif entre ses deux racines, donc sur $[-4;1]$.

3 Comme f est une fonction continue et positive sur $[-4;1]$, l'aire sous la courbe de f entre -4 et 1 est égale à $\int_{-4}^1 f(x)\,dx$.

Or, on peut déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$: $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 4x$.

On peut donc calculer l'intégrale cherchée à l'aide de cette primitive :

$$\int_{-4}^1 f(x)\,dx = \int_{-4}^1 \left(-x^2 - 3x + 4\right)dx = F(1) - F(-4) = \left[-\frac{1}{3}x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} \times (-4)^3 - 3\frac{(-4)^2}{2} + 4 \times (-4)\right) = \frac{125}{6}.$$

L'aire cherchée est donc égale à $\frac{125}{6}$ u.a.

Or 1 u.a $= 0{,}5$ cm $\times$ $0{,}5$ cm $= 0{,}25$ cm^2, donc l'aire cherchée est égale à $\frac{125}{24}$ cm^2.

2. Intégrale d'une fonction continue

1. Définition

Définition

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I et F une primitive de f sur I. On définit l'**intégrale de a à b de f** par : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, aussi noté $[F(x)]_a^b$.

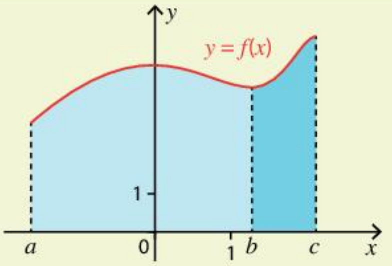
Remarque

Le réel $F(b)-F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie pour f : si G est une autre primitive de f, alors $G = F + k$ (k réel), donc $G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$.

2. Propriétés

Propriétés algébriques

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois réels appartenant à I et λ un réel.



- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ • $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- **Relation de Chasles :** $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$
- **Linéarité :** $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Propriétés : intégrales et inégalités

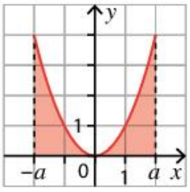
Soient deux réels a et b tels que $a \leqslant b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;b]$.

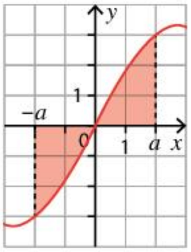
- **Positivité :** si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- **Ordre :** si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Propriétés : cas particuliers (admis)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 et a un réel appartenant à I.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.





3. Intégration par parties

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I et a et b deux réels appartenant à I. On a : $\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$.

Méthode 1 Calculer une intégrale en utilisant une primitive

Calculer $\int_{-4}^{3}(x^3 - x)\,\mathrm{d}x$.

Solution commentée

On détermine tout d'abord une primitive de la fonction $x \mapsto x^3 - x$ sur l'intervalle $[-4\,;3]$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2}$ en est une. D'où :

$$\int_{-4}^{3}(x^3 - x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{3} = \frac{81}{4} - \frac{9}{2} - (64 - 8) = \frac{81}{4} - \frac{18}{4} - \frac{224}{4} = -\frac{161}{4}$$

EXERCICE 12 p. 259

Méthode 2 Calculer des intégrales en utilisant des propriétés

On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

1. On pose $J = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$. Calculer J.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de I.

Solution commentée

1. $J = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$. On pose, pour tout $x \in [0\,;1]$, $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$.
Alors $u'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec u strictement positive sur $[0\,;1]$.
Donc $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)\right]_0^1 = \ln(\mathrm{e} + 1) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e} + 1}{2}\right)$.

2. $$I + J = \overbrace{\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1 + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x}^{\text{d'après la linéarité de l'intégrale}} = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1.$$

3. $I + J = 1 \Leftrightarrow I = 1 - J \Leftrightarrow I = 1 - \ln\left(\dfrac{\mathrm{e} + 1}{2}\right)$.

EXERCICE 20 p. 259

Méthode 3 Utiliser une intégration par parties pour calculer une intégrale

Soit $f : x \mapsto (x - 1)\mathrm{e}^x$. Calculer $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant une intégration par parties.

Solution commentée

On pose, pour tout x appartenant à $[1;2]$, $v(x) = x - 1$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
On a donc, pour tout $x \in [1;2]$, $v'(x) = 1$ et on peut choisir $u(x) = \mathrm{e}^x$.
u et v sont dérivables sur $[1;2]$ et u' et v' sont continues sur $[1;2]$.
On peut donc faire une intégration par parties :

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 v'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = (2-1)\mathrm{e}^2 - (1-1)\mathrm{e}^1 - \left[\mathrm{e}^x\right]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\right) = \mathrm{e}$$

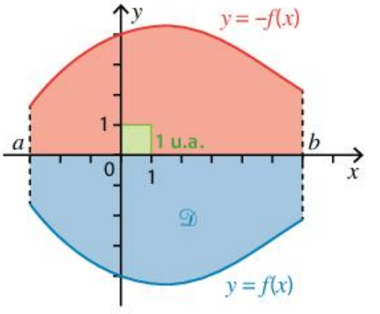
3. Applications du calcul intégral

1. Calcul d'aire

Propriété

DÉMO en ligne

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est égale à $\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$.

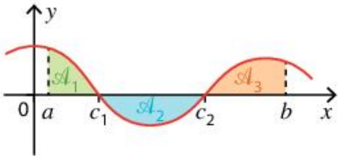


Remarque (fonction de signe non constant)

Il faut connaître le signe de la fonction avant de pouvoir calculer des aires.
Par exemple, sur le schéma ci-contre :

$$\mathscr{A}_{\text{totale coloriée}} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

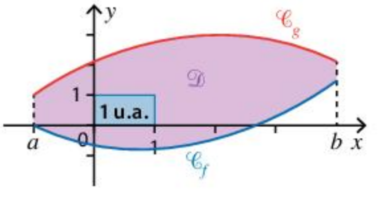
Mais $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 \neq \mathscr{A}_{\text{coloriée}}$



Propriété (admise)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est égale à :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$



2. Valeur moyenne

Définition

Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.

On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

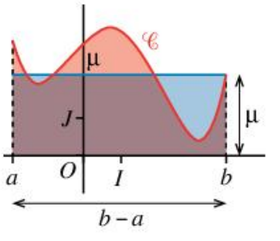
Exemple

Soit f la fonction définie sur $[3\,;5]$ par $f(x) = 2x^2 - 5$. La valeur moyenne de f sur $[3\,;5]$ vaut :

$$\mu = \frac{1}{5-3}\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^5 (2x^2 - 5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3 - 5x\right]_3^5 = \frac{1}{2}\left(\frac{175}{3} - 3\right) = \frac{83}{3}$$

Interprétation

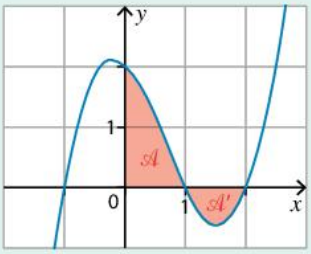
Si f est une fonction continue, on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$. Dans le cas où f est positive, l'aire sous la courbe de la fonction f (en rouge) est donc égale à l'aire du rectangle de largeur $b - a$ et de hauteur μ (en bleu), c'est-à-dire à l'aire sous la courbe de la fonction constante de valeur μ.



Méthode 1 Calculer une aire en utilisant des intégrales

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. On a tracé ci-contre sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 0,8 cm.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$.
2. Calculer l'aire de la partie colorée en centimètre carré.



Solution commentée

1. Pour tout réel x, on a $(x^2 - 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = f(x)$.

2. On calcule séparément les aires $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$.
   - Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x^2 - 1 \leqslant 0$ et $x - 2 \leqslant 0$, donc $f(x) \geqslant 0$.

   Donc $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - 0 = \frac{13}{12}$.
   - Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $x^2 - 1 \geqslant 0$ et $x - 2 \leqslant 0$, donc $f(x) \leqslant 0$.

   Donc $\mathscr{A}' = \int_1^2 (-f(x))\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \left(-\frac{16}{4} + \frac{16}{3} + \frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{5}{12}$.

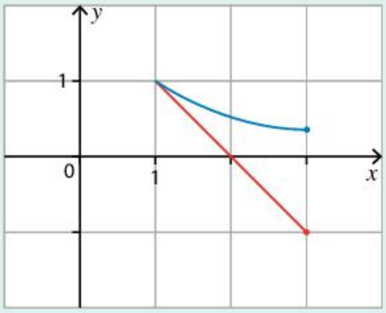
   L'aire colorée est donc égale à $\frac{13}{12} + \frac{5}{12} = \frac{18}{12}$ u.a. $= \frac{3}{2}$ u.a. ; or 1 u.a. = 0,8 cm × 0,8 cm = 0,64 cm², donc l'aire colorée est égale à 0,96 cm².

EXERCICE 37 p. 260

Méthode 2 Calculer une aire entre deux courbes

On considère les fonctions f et g, définies sur $[1;3]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2 - x$, représentées ci-contre dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[1;3]$.
2. En déduire le calcul de l'aire du domaine délimité par ces deux courbes et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$, en centimètre carré.



Solution commentée

1. Pour tout réel $x \in [1;3]$, $f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - (2 - x) = \frac{1 - 2x + x^2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$.

   Pour tout réel $x \in [1;3]$, $(x - 1)^2 \geqslant 0$ et $x > 0$. Donc, pour tout réel x de $[1;3]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$.

2. L'aire cherchée vaut donc, en u.a. :

   $\int_1^3 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - 2 + x\right)\mathrm{d}x = \left[\ln(x) - 2x + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \ln(3) - 6 + \frac{9}{2} - \left(\ln(1) - 2 + \frac{1}{2}\right) = \ln(3)$

   Comme 1 u.a. = 1 cm × 1 cm = 1 cm², l'aire cherchée vaut $\ln(3)$ cm².

EXERCICE 40 p. 261

Méthode 3 Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x$.

- Déterminer sa valeur moyenne μ sur l'intervalle $[0;6]$.

Solution commentée

$$\mu = \frac{1}{6-0}\int_0^6 (-x^2 + 6x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^6 = \frac{1}{6}\left(-\frac{6^3}{3} + 3 \times 6^2 - \left(\frac{0^3}{3} + 3 \times 0^2\right)\right) = 6$$