MATHEMATIQUES

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 9

Connaître le cours

1. Introduction aux matrices

1. Des matrices de différents types

Définitions

- Une **matrice** est un tableau dont les éléments sont des nombres.
- Le **format** de la matrice est défini par le nombre m de lignes et n de colonnes du tableau.
- Un **terme** (ou un élément) d'une matrice de format $m \times n$ est repéré par le numéro de la ligne et le numéro de la colonne auxquelles il appartient.

Définitions

- Une matrice ayant le même nombre n de lignes que de colonnes est appelée **matrice carrée d'ordre *n***.
- Une matrice n'ayant qu'une colonne est appelée **matrice colonne**.
- Une matrice n'ayant qu'une ligne est appelée **matrice ligne**.

Exemples

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0{,}5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée ; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

Définitions

La matrice dont tous les termes des lignes et des colonnes sont nuls est appelée la **matrice nulle**.
On la note avec la lettre O.

2. Addition de deux matrices

Définition

L'**addition de deux matrices de même format** se fait en additionnant les éléments situés au même endroit dans chaque matrice. On note la somme d'une matrice A et d'une matrice B avec le signe +.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 0 \\ 11 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. On a $A + B = \begin{pmatrix} 12 & -5 & 6 \\ 10 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ et $A + O = O + A = A$.

3. Produit d'une matrice par un réel

Définition

Soit A une matrice et k un nombre réel.
La matrice notée kA s'obtient en multipliant tous les éléments de A par k.
Par convention, on écrit le réel k à gauche de la matrice A.

Remarques

- Si $k = 0$ et A est une matrice, alors $0 \times A = O$. Si $k = -1$, on note $-A$ la matrice $(-1) \times A$.
La matrice $-A$ s'appelle la matrice opposée de A.
- Si A est la matrice nulle, alors $kA = O$.
- Si A et B sont deux matrices, alors $A - B = A + (-1) \times B$.

Exercice résolu 1 Reconnaître le format d'une matrice

Donner le format des matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2{,}5 & -4 & 0\\0{,}5 & -2{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}2 & 0{,}1 & 10 & -2\end{pmatrix}$.

Solution commentée

- A est une matrice carrée d'ordre 2.
- B est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.
- C est une matrice colonne à 2 lignes.
- D est une matrice ligne à 4 colonnes.

Exercice résolu 2 Additionner et soustraire des matrices

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\0{,}4 & 5\\1 & -2{,}5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\-1 & 0{,}5 & 2{,}4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-0{,}4 & 5 & 6\\-1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0 & 3\\0 & -1\\2{,}5 & 3{,}2\end{pmatrix}$.

1. Quelles matrices peut-on additionner ou soustraire ?
2. Effectuer les additions et soustractions possibles.

Solution commentée

1. Les matrices A et D ont même format. On peut les additionner et les soustraire. De même pour B et C.
2. $A+D=\begin{pmatrix}0 & 1\\0{,}4 & 4\\3{,}5 & 0{,}7\end{pmatrix}$; $A-D=\begin{pmatrix}0 & -5\\0{,}4 & 6\\-1{,}5 & -5{,}7\end{pmatrix}$; $B+C=\begin{pmatrix}0{,}6 & 7 & 10\\-2 & 2{,}5 & 2{,}4\end{pmatrix}$; $B-C=\begin{pmatrix}1{,}4 & -3 & -2\\0 & -1{,}5 & 2{,}4\end{pmatrix}$.

Exercice résolu 3 Multiplier une matrice par un nombre réel

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}20 & 32 & 34 & 15\\50 & 45 & 48 & 98\\23 & 18 & 12 & 67\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\frac{1}{10}A$.
2. Soit x un nombre réel. Calculer xA.

Solution commentée

1. $\frac{1}{10}A=\begin{pmatrix}2 & 3{,}2 & 3{,}4 & 1{,}5\\5 & 4{,}5 & 4{,}8 & 9{,}8\\2{,}3 & 1{,}8 & 1{,}2 & 6{,}7\end{pmatrix}$.
2. $xA=\begin{pmatrix}20x & 32x & 34x & 15x\\50x & 45x & 48x & 98x\\23x & 18x & 12x & 67x\end{pmatrix}$.

Exercice résolu 4 Enchaîner des opérations avec les matrices

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\4 & -2 & 0\\-3 & 3 & 6\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0{,}2 & -2{,}3 & \sqrt{3}\\1 & 0 & 0\\-1 & \frac{1}{2} & 5\end{pmatrix}$.

Calculer les matrices $C=2A-3B$ et $D=-A-B$.

Solution commentée

$C=2A-3B=\begin{pmatrix}3{,}4 & 10{,}9 & 6-3\sqrt{3}\\5 & -4 & 0\\-3 & 4{,}5 & -3\end{pmatrix}$; $D=-A-B=\begin{pmatrix}-2{,}2 & 3{,}3 & -3-\sqrt{3}\\-5 & 2 & 0\\4 & -3{,}5 & -11\end{pmatrix}$.

2. Produit de matrices

1. Produit d'une matrice carrée et d'une matrice colonne ou ligne

Définition

Soient A une matrice carrée d'ordre n et C une matrice colonne à n lignes.
Le **produit de A par C**, noté $A \times C$ ou AC, **dans cet ordre**, est une matrice colonne à n lignes.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ae + bf \\ ce + df \end{pmatrix}$$

Remarques

- Cette opération n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de C.
- $C \times A$ ne peut pas se calculer car le nombre de colonnes de C est différent du nombre de lignes de A.

Définition

Soient L une matrice ligne à n colonnes et A une matrice carrée d'ordre n.
Le **produit de L par A**, notée $L \times A$ ou LA, **dans cet ordre**, est une matrice ligne à n colonnes.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \end{pmatrix}$$

2. Produit de deux matrices carrées de même ordre

Définition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.
Le **produit** de A par B, noté $A \times B$ ou AB, **dans cet ordre**, est une matrice carrée d'ordre n.
Les lignes du produit $A \times B$ s'obtiennent en multipliant les matrices lignes de A par la matrice B.

Propriété admise

- $A \times B \times C = A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.

Remarques

- En général, $A \times B \neq B \times A$.
- $A \times O = O \times A = O$ où O est la matrice nulle.

3. Matrice carrée diagonale et matrice identité

Définition

On appelle matrice diagonale une matrice carrée constituée de termes tous nuls sauf sur la première diagonale qui contient des nombres réels (éventuellement nuls).
On appelle matrice identité d'ordre n, la matrice diagonale dont les éléments de la diagonale sont égaux à 1.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété (admise)

Pour toute matrice carrée A de même ordre que I, la matrice identité, on a $A \times I = I \times A = A$.

4. Puissance d'une matrice carrée

Définition

Pour n entier naturel non nul, on définit la **puissance n-ième d'une matrice** A, notée A^n, comme le produit de n facteurs égaux à A, c'est-à-dire $A^n = \underbrace{A \times A .... \times A}_{n \text{ facteurs } A}$ et $A^0 = I$.

Exercice résolu 1 Effectuer des calculs matriciels

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix}$.

Calculer $A+B$, A^2, AB, BA, AC et LB en utilisant les techniques du cours.

Solution commentée

- $A+B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$
- $A^2=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- $AB=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
- $BA=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$
- $AC=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$
- $LB=\begin{pmatrix}-7 & 1\end{pmatrix}$

Exercice résolu 2 Calculer des produits de matrices

Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

1. Calculer AB.
2. CALCULATRICE Calculer BA avec une calculatrice.

Solution commentée

1. $$AB=\begin{pmatrix}1\times1+(-1)\times2+2\times3 & 1\times2+(-1)\times3+2\times1 & 1\times3+(-1)\times1+2\times2\\ 1\times1+0\times2+1\times3 & 1\times2+0\times3+1\times1 & 1\times3+0\times1+1\times2\\ 2\times1+3\times2+4\times3 & 2\times2+3\times3+4\times1 & 2\times3+3\times1+4\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 6\\ 4 & 3 & 5\\ 20 & 17 & 17\end{pmatrix}$$

2. La matrice BA affichée par la calculatrice est

```
[9 8 16]
[7 1 11]
[8 3 15]
```
.

Exercice résolu 3 Calculer la puissance n-ième d'une matrice

1. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$. Montrer que $A^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n non nul.
2. Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis A^3.

Solution commentée

1. On procède par récurrence. On note P_n la propriété : $A^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$

• Pour $n=1$, $A=A^1$. La propriété est vraie.

• Soit n un entier naturel. On suppose P_n vraie.

$A^{n+1}=A\times A^n=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{n+1} & 0\\ 0 & b^{n+1}\end{pmatrix}$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

La propriété P_n est initialisée et héréditaire; elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

2. $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0$.

3. Matrice inverse d'une matrice carrée

1. Inversibilité d'une matrice

Définition

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **inversible** s'il existe une matrice B telle que $AB = I$ et $BA = I$.

Propriété (admise)

$AB = I \Leftrightarrow BA = I.$

DÉMO L'UNICITÉ p. 191

Propriété et définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible.
Il existe une unique matrice B vérifiant $AB = I$.
La matrice B se note alors A^{-1} et s'appelle la **matrice inverse** de A.

2. Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, n nombres réels inconnus.
Pour i et j deux entiers allant de 1 à n, on note $a_{i,j}$ des nombres réels fixés.
Soient $b_1, b_2, \dots, b_n$, n nombres réels fixés.
On appelle système linéaire (S) de n équations à n inconnues, le système d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ suivant :

$$(S)\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \dots + a_{3,n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Exemple

$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$. On a : $\begin{matrix} a_{1,1} = 2\ ; & a_{1,2} = 3\ ; & a_{1,3} = -1 \\ a_{2,1} = -1\ ; & a_{2,2} = 1\ ; & a_{2,3} = 3 \\ a_{3,1} = 5\ ; & a_{3,2} = -1\ ; & a_{3,3} = 3 \\ b_1 = 4\ ; & b_2 = -3\ ; & b_3 = -1. \end{matrix}$

Propriété (admise)

Si on note A la matrice des coefficients $a_{i,j}$ du système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}$, alors :

$$(S) \Leftrightarrow AX = B$$

Si la matrice A est inversible, les solutions du système s'obtiennent en calculant les éléments de X :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Exercice résolu 1 Inverse d'une matrice

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}7 & -4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$. Montrer que A est la matrice inverse de B.

Solution commentée

On calcule $A\times B=\begin{pmatrix}7\times3-4\times5 & 7\times4-4\times7\\ -5\times3+3\times5 & -5\times4+3\times7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$. A est donc la matrice inverse de B.

Exercice résolu 2 Déterminer la matrice inverse d'une matrice à l'aide d'un système

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$. Soient a et b deux réels.

1. Résoudre le système d'inconnues x et y : $\begin{cases}2x+y=a\\ x-3y=b\end{cases}$.
2. Déduire de la question 1 la matrice inverse de A.

Solution commentée

1. $\begin{cases}2x+y=a\\ x-3y=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(3y+b)+y=a\\ x=3y+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{7}a-\frac{2}{7}b\\ x=3y+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{7}a-\frac{2}{7}b\\ x=\frac{3}{7}a+\frac{1}{7}b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{7}a+\frac{1}{7}b\\ y=\frac{1}{7}a-\frac{2}{7}b\end{cases}$.

2. $\begin{cases}2x+y=a\\ x-3y=b\end{cases}\Leftrightarrow A\times X=B$ avec $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$.

On a alors $A\times X=B\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{7}a+\frac{1}{7}b\\ y=\frac{1}{7}a-\frac{2}{7}b\end{cases}\Leftrightarrow X=A^{-1}B$. Donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{1}{7} & \frac{-2}{7}\end{pmatrix}$.

Exercice résolu 3 Résoudre un système à l'aide de matrices

On considère le système $S\begin{cases}x+y-z=1\\ -x+2y+z=0\\ 2x+y-z=1\end{cases}$.

1. Écrire ce système sous la forme matricielle $AX=B$, en précisant A, X et B.
2. CALCULATRICE Déterminer la matrice inverse de A à l'aide de la calculatrice et résoudre S.

Solution commentée

1. On pose $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. On a alors $\begin{cases}x+y-z=1\\ -x+2y+z=0\\ 2x+y-z=1\end{cases}\Leftrightarrow AX=B$.

2. On obtient $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$. On a $AX=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\\ \frac{-2}{3}\end{pmatrix}$.