COURS HACHETTE

soutienscolaire@monsieurtahar.com

CHAPITRE 9

COMBINATOIRES ET DENOMBREMENT

1. Principes additif et multiplicatif

1. Ensemble fini et cardinal

Définition

Soit n un entier naturel. Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un **ensemble fini.**
Le nombre n d'éléments de E est appelé **cardinal** de E, noté Card(E).

Exemple

$E = \{a\ ;\ e\ ;\ i\ ;\ o\ ;\ u\ ;\ y\}$ est un ensemble fini à six éléments et Card(E) = 6.

Remarques

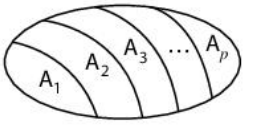
- $\text{Card}(\varnothing) = 0$
- Certains ensembles ne sont pas finis : l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ; l'ensemble des réels de l'intervalle [0 ; 1], etc.

2. Principe additif

Propriété

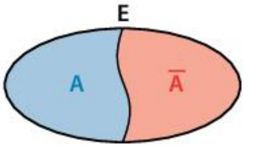
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$, p ensembles finis deux à deux disjoints. On a :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_p)$$



Corollaire

Soient A une partie d'un ensemble E fini et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.
On a : $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.



3. Principe multiplicatif

Définition et propriété

E et F sont deux ensembles non vides.

- Le **produit cartésien** de E par F, noté E × F, est l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.
- Lorsque les ensembles E et F sont finis, $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Remarque

Le signe × dans Card(E × F) désigne le produit cartésien des ensembles E et F, alors que celui dans Card(E) × Card(F) symbolise la multiplication de deux entiers.

Exemple

Soient $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ et $F = \{1\ ;\ 2\}$. Alors $E \times F = \{(a\ ;\ 1)\ ;\ (a\ ;\ 2)\ ;\ (b\ ;\ 1)\ ;\ (b\ ;\ 2)\ ;\ (c\ ;\ 1)\ ;\ (c\ ;\ 2)\}$.
et $F \times E = \{(1\ ;\ a)\ ;\ (2\ ;\ a)\ ;\ (1\ ;\ b)\ ;\ (2\ ;\ b)\ ;\ (1\ ;\ c)\ ;\ (2\ ;\ c)\}$.

Définition et propriété

Soient k un entier supérieur ou égal à 2 et $E_1, E_2, \ldots, E_k$, k ensembles non vides.

- Toute liste ordonnée $(x_1\ ;\ x_2 ; \ldots ;\ x_k)$, avec $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à k, est appelée ***k*-uplet** (ou ***k*-liste**).
- L'ensemble de ces k-uplets est le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$.
- Lorsque les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_k$ sont finis :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_k).$$

Remarque

Un 2-uplet est un **couple** et un 3-uplet est un **triplet**.

Méthode 1 Utiliser les principes additif et multiplicatif

Pour chacune des questions suivantes, indiquer le principe de dénombrement à utiliser et effectuer le calcul.

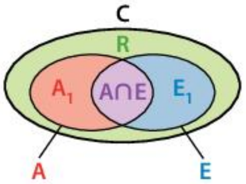
1. La carte d'un restaurant propose cinq entrées différentes et trois plats. Paula, ne souhaitant pas prendre les deux, hésite entre une entrée ou un plat. Combien a-t-elle de choix possibles ?
2. Dans le même restaurant, la carte propose également trois desserts. Jules décide de choisir le menu « entrée, plat et dessert ». Combien de menus différents Jules peut-il composer ?
3. Dans une classe de 35 élèves, 20 étudient l'allemand, 15 l'espagnol et 8 aucune de ces deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand et l'espagnol ?

Solution commentée

1. Il y a cinq choix d'entrées et trois choix de plats. D'après le principe additif, cela fait donc huit choix possibles.

2. Jules doit choisir successivement une entrée, un plat et un dessert. D'après le principe multiplicatif, cela donne $5 \times 3 \times 3 = 45$ menus différents.

3. On peut représenter la situation à l'aide du diagramme ci-dessous.



On note A l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand, A_1 l'ensemble des élèves qui n'étudient que l'allemand, E l'ensemble des élèves qui étudient l'espagnol, E_1 l'ensemble des élèves qui n'étudient que l'espagnol, R l'ensemble des élèves qui n'étudient aucune des deux langues et C l'ensemble des élèves de la classe.
On a $C = A_1 \cup (A \cap E) \cup E_1 \cup R$.
À l'aide du principe additif, on peut en déduire que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(C) &= \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A \cap E) + \mathrm{Card}(E_1) + \mathrm{Card}(R)\\ &= \mathrm{Card}(A \cup E) + \mathrm{Card}(R) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A \cap E) + \mathrm{Card}(R)\end{aligned}$$

soit $35 = 20 + 15 - \mathrm{Card}(A \cap E) + 8$, d'où $\mathrm{Card}(A \cap E) = 8$.
Il y a donc huit élèves qui étudient l'allemand et l'espagnol.

EXERCICE 7 p. 292

Méthode 2 Déterminer des produits cartésiens

1. On considère les ensembles $A = \{3 ; 2 ; 1\}$ et $B = \{0 ; 3\}$. Déterminer $A \times B$ et $B \times A$.
2. On considère l'ensemble $C = \{(6 ; 2) ; (6 ; 4) ; (5 ; 2) ; (5 ; 4) ; (10 ; 2) ; (10 ; 4) ; (3 ; 2) ; (3 ; 4)\}$. Écrire C sous la forme d'un produit cartésien de deux ensembles.
3. On considère les ensembles $E = \{a\}$, $F = \{b ; d\}$, $G = \{a ; b ; c\}$. Déterminer $G \times E \times F$.

Solution commentée

1. $A \times B = \{(3 ; 0) ; (3 ; 3) ; (2 ; 0) ; (2 ; 3) ; (1 ; 0) ; (1 ; 3)\}$
$B \times A = \{(0 ; 3) ; (0 ; 2) ; (0 ; 1) ; (3 ; 3) ; (3 ; 2) ; (3 ; 1)\}$.

2. $C = \{6 ; 5 ; 10 ; 3\} \times \{2 ; 4\}$

3. $G \times E \times F = \{(a ; a ; b) ; (b ; a ; b) ; (c ; a ; b) ; (a ; a ; d) ; (b ; a ; d) ; (c ; a ; d)\}$

2. k-uplets d'un ensemble fini

1. Nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments

Définition

Soit k un entier naturel non nul et E un ensemble non vide.
Un **k-uplet** (ou **k-liste**) **d'éléments de E** est un élément du produit cartésien :

$$\mathrm{E}^k = \mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \ldots \times \mathrm{E} \quad (k \text{ facteurs})$$

Exemple

$(a\,;b\,;r\,;a\,;c\,;a\,;d\,;a\,;b\,;r\,;a)$ est un 11-uplet de l'ensemble des 26 lettres $\mathrm{E} = \{a\,;b\,;c\,;\ldots\,;z\}$.

Théorème

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de k-uplets de E est n^k, soit $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^k) = n^k$.

Exemple

On dispose de trois boîtes notées A, B et C et cinq jetons de couleurs différentes que l'on doit ranger dans les boîtes. On note $\mathrm{T} = \{A\,;B\,;C\}$ l'ensemble des boîtes. Les différents rangements possibles sont des 5-uplets de T. Par exemple, $(A\,;B\,;B\,;A\,;C)$ signifie que l'on a rangé le premier jeton dans la boîte A, le deuxième dans la boîte B, etc. Il y a alors $3^5 = 243$ rangements possibles.

2. k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble, permutations

Théorème

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E est :

$$n(n-1)\ldots(n-k+1) \quad (k \text{ facteurs}).$$

Exemple

On dispose de trois jetons et de cinq boîtes notées A, B, C, D et E. On doit ranger les jetons dans les boîtes, une boîte ne pouvant pas contenir deux jetons. On dispose de cinq possibilités pour le premier jeton, de quatre possibilités pour le deuxième et de trois possibilités pour le troisième. Les rangements possibles sont dont les 3-uplets d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\mathrm{T} = \{A\,;B\,;C\,;D\,;E\}$.
Leur nombre est $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Définition

On appelle **permutation** d'un ensemble E à n éléments tout n-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.

Exemple

Les permutations de l'ensemble $\mathrm{E} = \{a\,;b\,;c\}$ sont :
$(a\,;b\,;c)$, $(a\,;c\,;b)$, $(b\,;c\,;a)$, $(b\,;a\,;c)$, $(c\,;b\,;a)$ et $(c\,;a\,;b)$.

Théorème et définition

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ($n \geqslant 1$) est le nombre noté $\boldsymbol{n!}$ (qui se lit « **factorielle n** » ou « **n factorielle** »), défini par : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Remarque

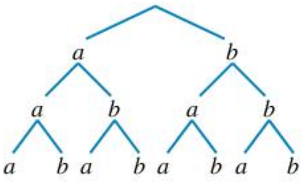
On convient que $0! = 1$.

Méthode 1 Dénombrer des k-uplets d'un ensemble fini

1. Établir la liste des triplets de l'ensemble $E = \{a ; b\}$.
2. Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former à l'aide des lettres A, E, I, O et U ?
3. Une grille est quadrillée avec 60 carreaux rectangulaires. On colorie chaque carreau en rouge, vert ou bleu. Combien de grilles différentes peut-on ainsi réaliser ?

Solution commentée

1. On peut s'aider d'un arbre de dénombrement.
Les triplets de E sont donc : $(a ; a ; a)$, $(a ; a ; b)$, $(a ; b ; a)$, $(a ; b ; b)$, $(b ; a ; a)$, $(b ; a ; b)$, $(b ; b ; a)$ et $(b ; b ; b)$.



2. Cela revient à chercher le nombre de 3-uplets d'un ensemble à 5 éléments.
Il y en a $5^3 = 125$.
3. Cela revient à chercher le nombre de 60-uplets d'un ensemble à 3 éléments. Il y en a 3^{60}.

EXERCICE 17 p. 293

Méthode 2 Dénombrer des k-uplets d'éléments distincts

Une compétition de jeux vidéo en ligne oppose six joueurs notés J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 et J_6.
À la fin, un classement est établi et il n'y a pas d'ex æquo. Le meilleur joueur reçoit une médaille d'or, le deuxième une médaille d'argent et le troisième une médaille de bronze.

- Combien y a-t-il de podiums possibles ?

Solution commentée

On note E l'ensemble des joueurs : $E = \{J_1 ; J_2 ; J_3 ; J_4 ; J_5 ; J_6\}$.
Comme il n'y a pas d'ex æquo, un podium correspond à un triplet d'éléments distincts de E.
Il y a six choix possibles pour la médaille d'or, puis cinq pour la médaille d'argent, puis quatre pour la médaille de bronze. Il y a donc $6 \times 5 \times 4 = 120$ podiums possibles.

EXERCICE 20 p. 293

Méthode 3 Dénombrer et utiliser des permutations

1. Combien peut-on former de mots (ayant un sens ou non) de sept lettres distinctes avec les lettres du mot « produit » ?
2. Parmi ces mots, combien commencent par une voyelle ?

Solution commentée

1. Cela équivaut à écrire une permutation des lettres du mot « produit ».
On peut donc former $7! = 5\ 040$ mots.
2. Parmi les mots obtenus, il y a ceux qui commencent par « o », « u » ou « i ».
Dans chacun de ces trois cas, il faut compléter les six dernières lettres du mot par les six lettres restantes, ce qui constitue à chaque fois une permutation de six lettres.
Il y a donc $6! = 720$ façons de compléter derrière chaque voyelle.
Le nombre de mots commençant par une voyelle est donc $3 \times 6! = 2\ 160$.

3. Parties d'un ensemble et combinais

1. Nombre de parties d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble. Dire qu'un ensemble F est une **partie** de E (ou que F est un **sous-ensemble** de E, ou que F est **inclus** dans E) signifie que tous les éléments de F sont éléments de E.
On note alors $F \subset E$.

Remarque

Il ne faut pas confondre une partie d'un ensemble avec un k-uplet. Par exemple, $\{1\ ;\ 2\} = \{2\ ;\ 1\}$ est une partie à deux éléments, tandis que $(1\ ;\ 2)$ et $(2\ ;\ 1)$ sont des couples distincts.

Exemple

On considère l'ensemble $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$. Les ensembles $A = \{a\ ;\ c\}$ et $B = \varnothing$ sont des parties de E.

Théorème

Soit n un entier naturel. Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0\ ;\ 1\}$, c'est-à-dire 2^n.

Remarque

On appelle mot de longueur n sur l'alphabet $A = \{a\ ;\ b\}$ un n-uplet d'éléments de A. Par exemple, $(a\ ;\ b\ ;\ b\ ;\ a)$ est un mot de longueur 4 sur l'alphabet A. Il y a 2^n mots de longueur n.

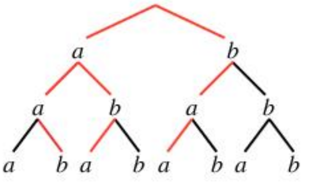
2. Combinaison

Définition

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble fini de cardinal n.
On appelle **combinaison de k éléments de E** toute partie de E ayant k éléments.

Exemple

On considère les mots de longueur 3 formés avec les lettres de l'alphabet $A = \{a\ ;\ b\}$. Construire un mot contenant exactement deux lettres a revient à déterminer la position des deux lettres a dans le mot de trois lettres (en rouge sur l'arbre ci-contre), c'est-à-dire une combinaison de deux éléments de l'ensemble $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$. Il y en a trois.



Propriété

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments, noté $\binom{n}{k}$, est donné par $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

Exemples

- Dans l'arbre précédent, il y a trois chemins contenant exactement deux lettres a : $\binom{3}{2} = 3$.
- $\binom{33}{5} = \dfrac{33 \times 32 \times \dots \times 29}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 237\ 336$.

Remarque

Pour calculer ces nombres « à la main », on utilise la première formule (qui est l'écriture simplifiée de la seconde). Sinon, la calculatrice permet de les déterminer.

Méthode 1 Dénombrer des parties d'un ensemble

On considère l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

1. Déterminer toutes les parties de l'ensemble E.
2. Combien y en a-t-il ? Quelle formule peut-on vérifier ?
3. Déterminer le nombre de parties à deux éléments de l'ensemble E. En déduire $\binom{4}{2}$.

Solution commentée

1. Les parties de E sont :
$\varnothing ; E ; \{1\} ; \{2\} ; \{3\} ; \{4\} ; \{1 ; 2\} ; \{1 ; 3\} ; \{1 ; 4\} ; \{2 ; 3\} ; \{2 ; 4\} ; \{3 ; 4\} ; \{1 ; 2 ; 3\} ; \{1 ; 2 ; 4\} ; \{1 ; 3 ; 4\} ; \{2 ; 3 ; 4\}$.
2. Il y en a 16. On retrouve $\text{Card}(E) = 2^4 = 16$.
3. Il y a six parties de E à deux éléments. On a donc $\binom{4}{2} = 6$.

EXERCICE 36 p. 294

Méthode 2 Calculer et interpréter des combinaisons

1. À l'aide de la calculatrice, calculer $\binom{12}{4}$ puis interpréter cette valeur en termes de nombre de parties d'ensemble.
2. Même question pour $\binom{6}{2}$ et $\binom{10}{10}$.

Solution commentée

1. • Sur Casio : MENU Exe-Mat OPTN PROB 1 2 F3 (nCR) 4

• Sur TI : 1 2 math PROB 3:Combinaison 4

• Sur NumWorks : paste Dénombrement binomial(n,k) k parmi n $\binom{12}{4}$

On obtient 495. C'est le nombre de parties à quatre éléments dans un ensemble à douze éléments.

2. $\binom{6}{2} = 15$. Il y a donc quinze parties à deux éléments dans un ensemble à six éléments.

$\binom{10}{10} = 1$. Il y a une seule partie à dix éléments dans un ensemble à dix éléments (c'est l'ensemble lui-même).

EXERCICE 44 p. 295

Méthode 3 Identifier des combinaisons

Dans un jeu de 32 cartes, une « main » est constituée de cinq cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent le valet de pique ?

Solution commentée

1. C'est le nombre de combinaisons à cinq éléments dans un ensemble à 32 éléments : $\binom{32}{5} = 201\,376$.
2. Une carte étant le valet de pique, les quatre autres cartes sont prises parmi les 31 restantes.
Le nombre de mains contenant le valet de pique est donc $\binom{31}{4} = 31\,465$.

4. Propriétés des combinaisons

1. Propriétés

Propriétés

Soit n un entier naturel.

- $\binom{n}{0} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il existe une seule partie à 0 élément : la partie vide.
- $\binom{n}{1} = n$. Dans un ensemble à n éléments, il y a n parties ayant un élément.
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ parties ayant deux éléments.
- $\binom{n}{n} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il y a une seule partie à n éléments : l'ensemble lui-même.
- Pour tous entiers n et k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $(n-k)$ éléments qui en sont les complémentaires.

Exemple

$\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$. Il y a donc autant de façons de choisir sept objets parmi dix que trois objets parmi dix.

Propriété

Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Relation et triangle de Pascal

Théorème (relation de Pascal)

Pour tous entiers naturels $n \geqslant 2$ et k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

On peut ainsi calculer les $\binom{n}{k}$ à l'aide du tableau ci-contre, appelé **triangle de Pascal**.

À l'intersection de la ligne n et de la colonne k, on lit l'entier $\binom{n}{k}$.

On commence par écrire les « 1 » de la première colonne et de la diagonale, puis on utilise la relation de Pascal, suivant le schéma :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
…									

Remarque

Pour tous réels a et b et pour tout entier $n \geqslant 1$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. La formule ainsi obtenue est appelée formule du binôme de Newton et les $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux**.

Méthode 1 Utiliser des combinaisons dans un problème de dénombreme

Une urne contient quatre boules blanches numérotées de 1 à 4, trois boules vertes numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de même couleur ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule noire ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant un seul numéro impair ?

Solution commentée

1. Un tirage simultané de trois boules représente une combinaison de trois éléments parmi neuf. Il y a donc $\binom{9}{3} = 84$ tirages possibles.

2. Le nombre de tirages possibles avec trois boules blanches est $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$.

   Le nombre de tirages possibles avec trois boules vertes est $\binom{3}{3} = 1$.

   Il ne peut pas y avoir trois boules noires. Alors, d'après le principe additif, il y a $4 + 1 = 5$ tirages possibles contenant trois boules de même couleur.

3. On dénombre d'abord le nombre de tirages sans boule noire : $\binom{7}{3} = 35$.

   Le nombre de tirages contenant au moins une boule noire est donc $84 - 35 = 49$.

4. Cinq boules ont un numéro impair. Le nombre de tirages d'une de ces boules est donc $\binom{5}{1} = 5$.

   Les deux autres boules sont à tirer parmi les quatre restantes, soit $\binom{4}{2} = 6$.

   Alors, d'après le principe multiplicatif, le nombre de tirages contenant un seul numéro impair est $5 \times 6 = 30$.

EXERCICE 38 p. 295

Méthode 2 Utiliser les coefficients du triangle de Pascal

Construire le triangle de Pascal jusqu'à $n = 8$ et donner la valeur de :

a. $\binom{4}{3}$ **b.** $\binom{5}{3}$ **c.** $\binom{7}{3}$ **d.** $\binom{8}{3}$

Solution commentée

a. On cherche $\binom{4}{3}$ dans le triangle.
$\binom{4}{3} = 4$

b. $\binom{5}{3} = 10$

c. $\binom{7}{3} = 35$

d. $\binom{8}{3} = 56$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1