Répéter en solo

Carte mentale

Étudier les transformations de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires et a et b deux réels.

- La variable aléatoire $Y = aX + b$ prend pour valeurs les réels $y_i = ax_i + b$, pour tout i allant de 1 à n.

On a alors $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(Y) = V(ax + b) = V(aX) = a^2V(X)$.

- Linéarité de l'espérance :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \text{ et } E(aX) = aE(X)$$

- Si X et Y sont associées à deux expériences aléatoires **indépendantes** alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Étudier des inégalités de concentration : inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et soit a un nombre réel strictement positif.

On a $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$.

La probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.

Étudier des inégalités de concentration : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit t un nombre réel strictement positif.

On a $P(|X - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(X)}{t^2}$.

La probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins t de l'espérance $E(X)$ est d'autant plus petite que t est grand.

On a $1 - P(|X - E(X)| \geqslant t) = P(E(X) - t < X < E(X) + t)$.

Loi des grands nombres

Utiliser la loi des grands nombres : cas particulier de la loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli

On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires associées aux n épreuves de Bernoulli de paramètre p, qui prennent la valeur 1 en cas de « succès » et 0 sinon.

$S_n = \sum_{n=1}^{n} X_i = X_1 + \ldots + X_n$ est le nombre de succès lors des n épreuves.

S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.

$M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$ est la moyenne empirique.

Soit $t > 0$.

On a : $P(|S_n - np| \geqslant t) \leqslant \frac{np(1-p)}{t^2}$

et $P(|M_n - p| \geqslant t) \leqslant \frac{p(1-p)}{nt^2}$.

Utiliser la loi des grands nombres : convergence en probabilité

On répète n fois de manière indépendante une expérience aléatoire à laquelle on associe une variable aléatoire X. Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ainsi obtenues ont la même loi que X (donc même espérance $E(X)$ et variance $V(X)$).

Pour tout $t > 0$, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(X)}{nt^2},$$

avec $M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$,

et $\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geqslant t) = 0$.

On dit que M_n converge en probabilité vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour estimer l'espérance (la moyenne théorique), on peut répéter l'expérience de manière indépendante un grand nombre de fois et calculer la moyenne empirique.