Répéter en solo

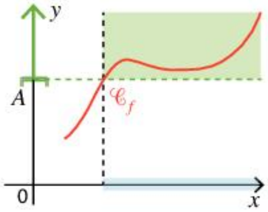
Carte mentale

Limites de fonctions

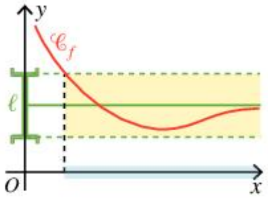
Définir les limites et les asymptotes

Limites en $+\infty$ et $-\infty$

- **Limite infinie :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. La définition est analogue pour la limite de f en $-\infty$.

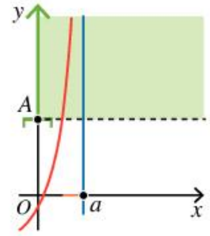


- **Limite finie :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. La définition est analogue pour la limite de f en $-\infty$. La droite d'équation $y = \ell$ est alors une **asymptote horizontale** à la courbe de f.



Limite infinie en a

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. La définition est analogue pour $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- La droite d'équation $x = a$ est alors une **asymptote verticale** à la courbe de f.



Calculer une limite

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Limites, opérations et formes indéterminées (FI)

Si :					
$\lim f = \ldots$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	∞
$\lim g = \ldots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	0
alors :					
$\lim (f+g) = \ldots$	$+\infty$	$-\infty$	FI	∞	∞
$\lim (fg) = \ldots$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	FI
$\lim \left(\dfrac{f}{g}\right) = \ldots$	FI	FI	FI	0	∞

Comparer pour déterminer une limite

- Soient f et g telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[A\,;+\infty[$.

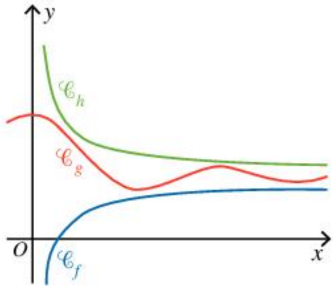
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

- **Théorème des gendarmes :** soient f, g et h telles que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ sur $[A\,;+\infty[$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell.$$



Par analogie, on peut écrire les mêmes propriétés en $-\infty$ et en un réel a.