Répéter en solo

Carte mentale

Déterminer le cardinal d'un ensemble fini

- Le nombre n d'éléments d'un ensemble E est noté **Card(E)**.
- $\text{Card}(\varnothing) = 0$.
- **Principe additif.** Si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont p ensembles finis deux à deux disjoints, alors :
$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_p)$$
- Le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$ est l'ensemble de tous les k-uplets $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_k)$, avec $x_i \in E_i$.
- **Principe multiplicatif.** Si les ensembles E_i sont finis, alors :
$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_k)$$

Combinatoire et dénombrement

Modéliser à l'aide de k-uplets d'un ensemble E

- Un **k-uplet $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_k)$** de **E** avec tous les $x_i \in$ E est un élément de l'ensemble :
$E^k = E \times \ldots \times E$ (k facteurs).
Par exemple, $(a ; b ; c ; a ; c ; a)$ et $(b ; a ; c ; a ; c ; a)$ sont deux 6-uplets distincts de $E = \{a ; b ; c\}$
- Le nombre de k-uplets d'un ensemble E à n éléments est :
$$n^k = \text{Card}(E^k).$$

Modéliser à l'aide de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble E à n éléments

- Un **k-uplet d'éléments deux à deux distincts** de E est $(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_k)$ avec tous les $x_i \in$ E et $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_k$.
- Le **nombre de k-uplets** de E deux à deux **distincts** est :
$$n(n-1) \ldots (n-k+1) \text{ (k facteurs)}.$$
- Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un n-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.
- Le **nombre de permutations** d'un ensemble non vide à n éléments est :
$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Modéliser à l'aide de combinaisons

- F est une **partie** de E signifie que tous les éléments de F sont éléments de E. On note **F ⊂ E**.
- Le **nombre de parties** d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n.
- Une **combinaison** de k éléments parmi les n éléments de E est une partie de E ayant k éléments.
- Le **nombre de combinaisons** de k éléments parmi n éléments est :
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Triangle de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	…
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	$\binom{n-1}{k-1} +$	$\binom{n-1}{k}$	1		
4	1	4	$= \binom{n}{k}$	4	1	
…						