Répéter en solo

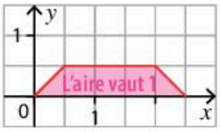
Carte mentale

Loi de probabilités à densité

Montrer que f est une fonction de densité

f est une fonction de densité lorsque :

- f est continue, positive sur un intervalle I, appelé support de f, et nulle en dehors de I ;
- l'aire sous la courbe représentative de f est égale à 1.



Calculer les paramètres d'une variable aléatoire continue de densité f de support $I=[a\,;b]$

- L'espérance de X est :

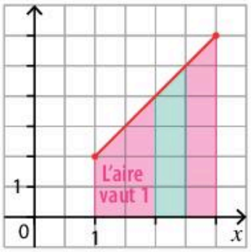
$$E(X)=\int_a^b x\ f(x)\mathrm{d}x.$$

- La variance de X est :

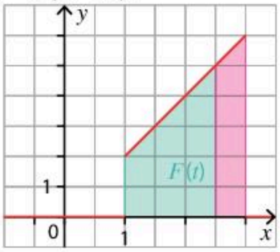
$$V(X)=\int_a^b (x-E(X))^2\ f(x)\mathrm{d}x.$$

Calculer une probabilité

- Soit X une variable aléatoire de fonction de densité f.
  On a $P(X\in[a\,;b])=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



- Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est F.
  On a $F(t)=P(X\leqslant t)$.



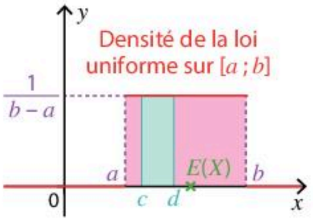
$$P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$=F(b)-F(a)$$

$P(X=a)=0$ pour tout réel a

Modéliser avec la loi uniforme sur $[a\,;b]$

X suit la loi uniforme sur $[a\,;b]$ si sa fonction de densité f est définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{b-a}=\text{cte pour tout réel } x\in[a\,;b] \\ f(x)=0 \text{ sinon}\end{cases}$$

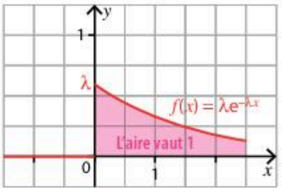


- Cette loi permet de modéliser le choix au hasard d'un nombre réel dans un intervalle
- $P(X\in[c\,;d])=\dfrac{d-c}{b-a}=\dfrac{\text{longueur de }[c\,;d]}{\text{longueur de }[a\,;b]}$
- $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$
- $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

Modéliser avec la loi exponentielle de paramètre λ

X suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa fonction de densité f est :

$$\begin{cases} f(x)=\lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x\geqslant 0 \\ f(x)=0 \text{ sinon}\end{cases}.$$



- Cette loi permet de modéliser une durée de vie de certains phénomènes dits « sans mémoire » car $P_{X>t}(X>s+t)=P(X>s)$.
- La fonction de répartition de X est la fonction F définie par $\begin{cases} F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t} \text{ si } t\geqslant 0 \\ F(t)=0 \text{ sinon}\end{cases}.$
- $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$
- $V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$