Répéter en solo

Carte mentale

Démontrer par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (en général, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$), on peut utiliser le **raisonnement par récurrence** :

1. Initialisation	**2. Hérédité**
On vérifie que **$P(n_0)$ est vraie.**	Hypothèse de récurrence : on considère un entier quelconque k tel que $k \geqslant n_0$ et on suppose que $P(k)$ est vraie. On démontre l'implication : « $P(k)$ **vraie** » ⟹ « $P(k+1)$ **vraie** »

3. Conclusion

$P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Suites numériques et récurrence

Étudier la monotonie d'une suite

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Pour démontrer qu'une suite est croissante ou décroissante :

– on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

– si $u_n = f(n)$, on peut étudier le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

– si $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut démontrer par récurrence qu'une des propriétés $P(n)$: « $u_{n+1} \leqslant u_n$ » ou $P(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ » est vraie pour tout entier naturel n.

Montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.

M est appelé un **majorant** de (u_n). Une suite majorée admet une infinité de majorants

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.

m est appelé un **minorant** de (u_n). Une suite minorée admet une infinité de minorants.

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- Pour démontrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée, on raisonne parfois par récurrence.