

4^e

1

Utiliser l'égalité de Pythagore

Vidéo

La **racine carrée** d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré est égal à a . Elle est notée $\sqrt{a}$ et se lit « racine carrée de a ».

Définition

Exemples

$$\sqrt{36} = 6 \text{ car } 6^2 = 36$$

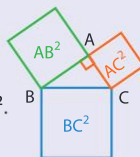
$$\sqrt{12} \approx 3,464$$

Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit, si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Cette égalité est appelée « **égalité de Pythagore** ».



Théorème

Exemples

Calculer la longueur de l'hypoténuse

Le triangle ARS est rectangle en A.

D'après le théorème de Pythagore :

$$RS^2 = RA^2 + AS^2$$

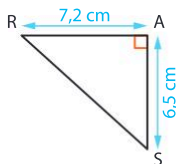
$$RS^2 = 7,2^2 + 6,5^2$$

$$RS^2 = 51,84 + 42,25$$

$$RS^2 = 94,09$$

$$RS = \sqrt{94,09}$$

$$RS = 9,7 \text{ cm}$$



Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

Le triangle EFG est rectangle en G.

D'après le théorème de Pythagore :

$$EF^2 = EG^2 + GF^2$$

$$4,8^2 = 2,5^2 + GF^2$$

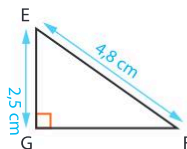
$$23,04 = 6,25 + GF^2$$

$$GF^2 = 23,04 - 6,25$$

$$GF^2 = 16,79$$

$$GF = \sqrt{16,79}$$

$$GF \approx 4,1 \text{ cm}$$



Théorème de Pythagore : réciproque

Dans un triangle, si le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Théorème

Soit ABC un triangle dont le plus grand côté est [BC].

- Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.
- Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle.

Méthode

On dit que l'égalité de Pythagore est une **propriété caractéristique** du triangle rectangle : elle n'est vraie que dans un triangle rectangle.



Exemple

Le triangle EFG ci-contre est-il rectangle ?

[EG] est le plus grand côté.

$$EG^2 = 6,5^2$$

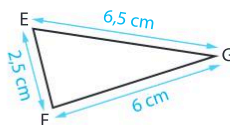
$$EF^2 + FG^2 = 2,5^2 + 6^2$$

$$EG^2 = 42,25$$

$$EF^2 + FG^2 = 6,25 + 36$$

$$EF^2 + FG^2 = 42,25$$

$EG^2 = EF^2 + FG^2$: l'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle EFG est rectangle en F.





2

Calculer des rapports trigonométriques

Vidéo

Propriété et définitions

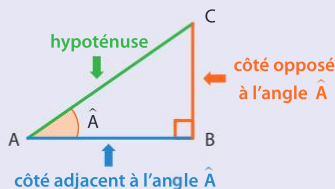
- Dans un triangle ABC rectangle en B, les rapports $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$ et $\frac{BC}{AB}$ ne dépendent que de la mesure de l'angle $\hat{A}$.

Ces rapports sont respectivement appelés **cosinus**, **sinus** et **tangente** de l'angle $\hat{A}$ et notés $\cos \hat{A}$, $\sin \hat{A}$ et $\tan \hat{A}$.

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}} = \frac{BC}{AB}$$



- Pour mémoriser : **SOH CAH TOA**

$$\sin(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos(\text{angle}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

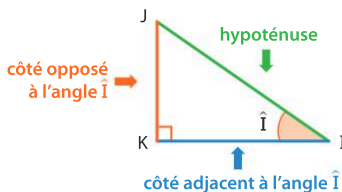
Exemple

Dans le triangle IJK rectangle en K :

$$\cos \hat{I} = \frac{IK}{IJ}$$

$$\sin \hat{I} = \frac{JK}{IJ}$$

$$\tan \hat{I} = \frac{JK}{IK}$$



Le cosinus, le sinus et la tangente n'ont pas d'unité.

Propriétés

- Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres strictement compris entre 0 et 1.
- La tangente d'un angle aigu est un nombre strictement positif.
- Pour tout angle aigu $\hat{A}$, $(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1$ (on note aussi $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$).
- Pour tout angle aigu $\hat{A}$, $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$.



3 Utiliser les rapports trigonométriques

[Vidéo](#)

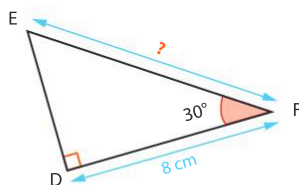
Méthode

Pour **calculer la longueur** d'un côté dans un triangle rectangle, il faut connaître :

- la longueur d'un côté ;
- la mesure d'un angle.

On peut alors trouver la longueur inconnue en utilisant le rapport trigonométrique qui fait intervenir l'angle connu, la longueur connue et la longueur inconnue.

Exemple



Dans le triangle EFD rectangle en D :

$$\cos \widehat{EFD} = \frac{FD}{EF}$$

$$\frac{\cos 30^\circ}{1} = \frac{8}{EF}$$

$$EF = \frac{8 \times 1}{\cos 30^\circ}$$

$$EF \approx 9,2 \text{ cm}$$

Pour calculer la longueur du 3^e côté, on peut utiliser le théorème de Pythagore.

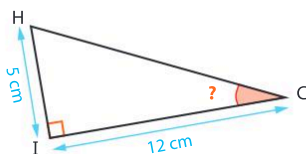


Méthode

Pour **calculer la mesure d'un angle** aigu dans un triangle rectangle, il faut connaître les longueurs de deux côtés.

On peut alors trouver la mesure de l'angle en utilisant le rapport trigonométrique qui fait intervenir l'angle inconnu et les deux longueurs connues.

Exemple



Dans le triangle HIC rectangle en I :

$$\tan \widehat{HCI} = \frac{HI}{IC}$$

$$\tan \widehat{HCI} = \frac{5}{12}$$

Avec la touche « arctan » de la calculatrice, on trouve $\widehat{HCI} \approx 23^\circ$.

Pour calculer la mesure du 3^e angle, on peut utiliser la somme des trois angles d'un triangle.

