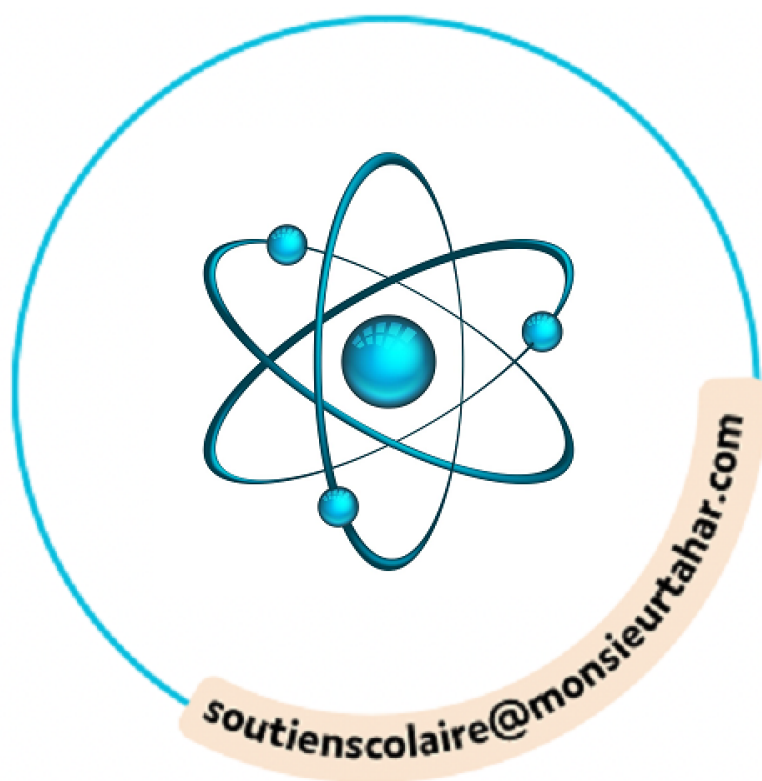


MATHS



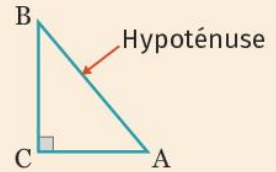
CHAPITRE 11



1 Le théorème de Pythagore

Définition

Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté opposé à l'angle droit.
L'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle.



Exemple :

L'angle $\widehat{ACB}$ mesure 90° , c'est donc un angle droit. Ainsi, ABC est un triangle rectangle en C et le côté $[AB]$ (le côté opposé à l'angle droit) est son hypoténuse.

Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (les côtés de l'angle droit).

Exemple :

Le triangle ABC ci-dessus est rectangle en C.

D'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Conséquence du théorème

Dans un triangle, si l'égalité de Pythagore **n'est pas** vérifiée, alors on peut faire un raisonnement par l'absurde et en déduire que le triangle **n'est pas** rectangle. C'est la **contraposée du théorème de Pythagore**.

2 La réciproque du théorème de Pythagore

Réciproque du théorème de Pythagore

Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Exemple :

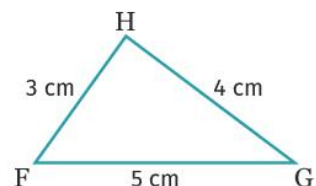
Dans le triangle FGH ci-contre, $[FG]$ est le plus grand côté.

D'une part, $FG^2 = 5^2 = 25$.

D'autre part, $FH^2 + HG^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.

Ainsi, $FG^2 = FH^2 + HG^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle FGH est rectangle en H.





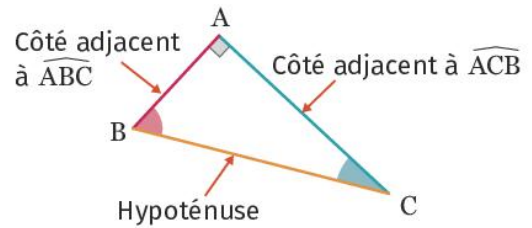
3 Cosinus d'un angle aigu

Définition

Dans un triangle rectangle, chacun des deux angles aigus est défini par un sommet et deux côtés. L'un des deux côtés est l'**hypoténuse**, l'autre est le **côté adjacent** à l'angle aigu.

Exemple :

ABC est un triangle rectangle en A.
[BC] est l'hypoténuse (le plus grand côté).
[AC] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$.
[AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$.



Propriété

Dans un triangle rectangle, le quotient de la longueur du côté adjacent à un angle aigu par la longueur de l'hypoténuse ne dépend que de la mesure de cet angle.

Remarque : Il est possible de démontrer cette propriété à l'aide du théorème de Thalès.

Définition

Dans un triangle rectangle, on définit le **cosinus** d'un angle aigu comme le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

Dans le triangle ABC rectangle en A, on note $\cos(\widehat{ACB})$ le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$ et on peut écrire $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$, soit $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{AC}{BC}$.

Exemple :

Si RST est un triangle rectangle en T, alors $\cos(\widehat{SRT}) = \frac{RT}{RS}$.

Propriété

Le cosinus d'un angle aigu est un nombre compris entre 0 et 1.

Démonstration :

Le cosinus est le quotient de deux longueurs (qui sont donc positives) donc le cosinus est positif. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté donc le cosinus est une fraction avec un numérateur inférieur au dénominateur. La fraction est donc inférieure à 1.

Remarque : Si on connaît le cosinus d'un angle aigu, on utilise la calculatrice en mode degré qui, à l'aide de la touche **Arccos** (notée aussi **cos⁻¹** ou encore **ACS**), permet de déterminer la mesure de l'angle.