

5^e

1

Additionner et soustraire des nombres relatifs

Vidéo

Si deux nombres relatifs ont le **même signe**, alors leur somme a :

Règle

- le même signe que les deux nombres ;
- pour distance à zéro, la **somme** de leurs distances à zéro.

Exemples

On veut calculer $12,8 + 15,6$.

12,8 et **15,6** sont deux nombres **positifs** :

- leur somme est **positive**
- on **ajoute** leurs distances à zéro

$$12,8 + 15,6 = 28,4$$

On veut calculer $-3,2 + (-5,9)$.

-3,2 et **-5,9** sont deux nombres **négatifs** :

- leur somme est **négative**
- on **ajoute** leurs distances à zéro

$$-3,2 + (-5,9) = -(3,2 + 5,9) = -9,1$$

Pour éviter que deux signes ne se suivent, on utilise des parenthèses.



Si deux nombres relatifs sont de **signes contraires**, alors leur somme a :

Règle

- le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro ;
- pour distance à zéro, la **différence** de leurs distances à zéro.

Exemples

On veut calculer $12 + (-9)$.

12 et **-9** sont de signes contraires :

- leur somme est **positive** car le nombre qui a la plus grande distance à zéro est **12**
- on **soustrait** leurs distances à zéro

$$12 + (-9) = 12 - 9 = 3$$

On veut calculer $-7,8 + 5,2$

-7,8 et **5,2** sont de signes contraires :

- leur somme est **négative** car le nombre qui a la plus grande distance à zéro est **-7,8**
- on **soustrait** leurs distances à zéros

$$-7,8 + 5,2 = -(7,8 - 5,2) = -2,6$$

Pour **soustraire un nombre relatif**, on ajoute son opposé.

Règle

Exemples

On veut calculer $A = -12 - 7$.

Pour soustraire **7**, on ajoute son opposé : **-7**

$$A = -12 - 7$$

$$A = -12 + (-7)$$

$$A = -(12 + 7)$$

$$A = -19$$

On veut calculer $B = 5,6 - (-3,2)$.

Pour soustraire **-3,2**, on ajoute son opposé :

$$3,2.$$

$$B = 5,6 - (-3,2)$$

$$B = 5,6 + 3,2$$

$$B = 8,8$$

Pour effectuer des additions et des soustractions de nombres relatifs, on peut :

Règle

- **transformer** les soustractions en additions ;
- **regrouper** les nombres positifs entre eux et les nombres négatifs entre eux.

Exemples

On veut calculer $D = (-5) + 4 - (-8) + (-1) - 2 - 7$.

- On transforme les **soustractions en addition** :

$$D = (-5) + 4 - (-8) + (-1) - 2 - 7$$

$$D = (-5) + 4 + 8 + (-1) + (-2) + (-7)$$

- On regroupe les positifs ensemble et les négatifs ensemble :

$$D = 4 + 8 + (-5) + (-1) + (-2) + (-7)$$

$$D = 12 + (-15)$$

$$D = -3$$

4^e

2

Multiplier et diviser des nombres relatifs

Vidéo

Règle des signes

Le produit (ou le quotient) de deux nombres relatifs de même signe est positif.
Le produit (ou le quotient) de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.

Règle

Pour **calculer un produit (ou un quotient)**, on détermine son signe, puis on multiplie (ou on divise) les distances à zéro.

Exemples

$$2 \times 7 = 14$$

$$\frac{5}{-4} = -1,25$$

$$\frac{-3}{-5} = 0,6$$

$$(-5,5) \times 3 = -16,5$$

Attention, le produit
(ou le quotient) de deux
nombres **négatifs** est positif !



Cas particuliers

a désigne un nombre relatif.

- Le produit d'un nombre relatif par 0 est égal à zéro : $a \times 0 = 0$.
- Le produit d'un nombre relatif par -1 est égal à son opposé : $a \times (-1) = -a$

Exemples

$$(-2,7) \times 0 = 0$$

$$3,8 \times (-1) = -3,8, \text{ ainsi } -3,8 \text{ est l'opposé de } 3,8.$$

$$(-7,2) \times (-1) = -(-7,2) = 7,2, \text{ ainsi } 7,2 \text{ est l'opposé de } -7,2.$$

Attention, le nombre $-a$
n'est pas forcément négatif :
si a est **négatif**, $-a$ est positif !



a et b désignent des nombres relatifs ($b \neq 0$).

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Règle

Exemples

$$\frac{-2}{13} = \frac{2}{-13} = -\frac{2}{13} : \text{les trois quotients sont } \textbf{négatifs}.$$

$$\frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} : \text{les deux quotients sont } \textbf{positifs}.$$

Pour **déterminer le signe d'un produit** (ou d'un quotient) de plusieurs facteurs, on compte le nombre de facteurs négatifs :

- s'il y en a un nombre pair, alors le produit (ou le quotient) est positif.
- s'il y en a un nombre impair, alors le produit (ou le quotient) est négatif.

Méthode

Exemples

$$A = (-3) \times 5 \times (-1) \times 4$$

Il y a deux facteurs négatifs et 2 est un nombre pair donc le produit est **positif** :

$$A = 60$$

$$B = \frac{(-2) \times 12}{(-1) \times (-4)}$$

Il y a trois facteurs négatifs et 3 est un nombre impair donc le quotient est **négatif**.

$$B = -6.$$

4^e

3

Calculer la puissance d'un nombre

Vidéo

Définition

a désigne un nombre relatif et n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.

Le produit de n facteurs égaux à a se note a^n et se lit « a exposant n ».

On dit que ce produit est une **puissance de a** .

Le nombre a^{-n} désigne l'inverse du nombre a^n (avec $a \neq 0$).

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$



Cas particuliers : on convient que $a^1 = a$ et que, si $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

Exemples

$$(-3)^4 = \underbrace{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)}_{4 \text{ facteurs}} = 81$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

$$4^0 = 1$$

Règle

Dans une expression sans parenthèses comportant des puissances, on effectue d'abord les puissances, puis les multiplications et les divisions, et enfin les additions et les soustractions.

Exemples

$$A = 1 + 3 \times 2^3 = 1 + 3 \times 8 = 1 + 24 = 25$$

$$B = 1 + (3 \times 2)^3 = 1 + 6^3 = 1 + 216 = 217$$

Propriété

n désigne un nombre entier strictement positif.

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}}} = 0, \underbrace{0 \dots 01}_{n \text{ chiffres après la virgule}}$$

Exemples

$$10^9 = 1 \underbrace{000\,000\,000}_{9 \text{ zéros}} \text{ (1 milliard)}$$

$$10^{-6} = 0, \underbrace{000\,001}_{6 \text{ chiffres}} \text{ (1 millionième)}$$

Définition

L'**écriture scientifique** d'un nombre décimal positif est l'écriture de la forme $a \times 10^n$ où :

- a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$;
- n est un nombre entier relatif.

Exemples

L'écriture scientifique de 1 785 000 000 est $1,785 \times 10^9$ (1 milliard 785 millions).

L'écriture scientifique de 0,000 028 est $2,8 \times 10^{-5}$.



4

Déterminer la forme irréductible d'une fraction

Vidéo

Définition

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire comme une fraction, c'est-à-dire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs ($q \neq 0$).



- Les nombres entiers, les nombres décimaux et les fractions sont des nombres rationnels.
- Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels. Par exemple : π et $\sqrt{2}$, qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction.

Propriétés

4

- Un quotient ne change pas si l'on multiplie ou si l'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

a , b et k désignent trois nombres ($b \neq 0$ et $k \neq 0$).

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

- a , b , c et d désignent des nombres relatifs ($b \neq 0$ et $d \neq 0$).

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $ad = bc$. Si $ad = bc$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Exemples

$$\frac{3,1}{7} = \frac{3,1 \times 10}{7 \times 10} = \frac{31}{70}$$

$$\frac{18}{30} = \frac{18 \div 6}{30 \div 6} = \frac{3}{5}$$

On veut savoir si les fractions $\frac{20}{37}$ et $\frac{220}{407}$ sont égales.

On calcule les « produits en croix » :

$$20 \times 407 = 8140 \quad \text{et} \quad 220 \times 37 = 8140.$$

Les produits en croix sont égaux, donc les fractions sont égales :

$$\frac{20}{37} = \frac{220}{407}$$

Définition

a et b désignent deux entiers relatifs ($b \neq 0$).

On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** si le seul diviseur positif commun à a et b est égal à 1.

Exemple

$\frac{5}{8}$ est une fraction irréductible : le seul diviseur positif commun à 5 et 8 est 1.

Méthode

a et b désignent deux entiers relatifs ($b \neq 0$). Pour rendre la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, on peut :

- simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ en plusieurs étapes, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus la simplifier ;
- ou
- décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers puis simplifier.

Exemple

On cherche la forme irréductible de $\frac{24}{36}$.

$$\frac{24}{36} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ou} \quad \frac{24}{36} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

4^e

5

Additionner et soustraire des fractions

Vidéo

Règle

Pour **additionner (ou soustraire) deux fractions** :

• si elles n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les écrire avec le même dénominateur.

Puis :

- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs ;
- on garde le dénominateur commun.

a, b et c désignent trois nombres relatifs ($c \neq 0$).

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemples

On veut calculer $\frac{5}{2} + \frac{3}{7}$.

On écrit les deux fractions avec le même dénominateur, ici un multiple commun à 2 et 7.

$$\frac{5}{2} + \frac{3}{7} = \frac{5 \times 7}{2 \times 7} + \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{35}{14} + \frac{6}{14} = \frac{41}{14}$$

On veut calculer $\frac{3}{4} - \frac{11}{6}$.

On écrit les deux fractions avec un même dénominateur, ici 12.

$$\frac{3}{4} - \frac{11}{6} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{11 \times 2}{6 \times 2} = \frac{9}{12} - \frac{22}{12} = \frac{9-22}{12} = \frac{-13}{12}$$

4^e

6

Multiplier des fractions

Vidéo

Règle

Pour **multiplier deux fractions** :

- on multiplie les numérateurs entre eux ;
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

a, b, c et d désignent quatre nombres ($b \neq 0$ et $d \neq 0$).

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemples

$$\frac{3}{8} \times \frac{-1}{4} = \frac{3 \times (-1)}{8 \times 4} = \frac{-3}{32}$$

$$\frac{24 \times 56}{28 \times 18} = \frac{6 \times 4 \times 8 \times 7}{4 \times 7 \times 3 \times 6} = \frac{8}{3}$$



Cette règle s'applique aussi pour multiplier un entier par une fraction.

Exemple

$$3 \times \frac{2}{7} = \frac{-3}{1} \times \frac{2}{7} = \frac{-3 \times 2}{7} = \frac{-6}{7}$$

Règle

Pour calculer une fraction d'un nombre (ou d'une quantité), on multiplie la fraction par ce nombre (ou par cette quantité).

Exemples

Lilia a mangé les $\frac{2}{5}$ d'un paquet de 300 g de biscuits.

$$\frac{2}{5} \times 300 = \frac{2 \times 300}{5} = \frac{600}{5} = 120$$

Elle a mangé 120 g de biscuits.

Esteban a dépensé les $\frac{2}{7}$ des $\frac{3}{5}$ de son argent de poche pour acheter un cadeau à son petit frère.

$$\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$$

Il a dépensé les $\frac{6}{35}$ de son argent de poche pour le cadeau.



7 Diviser par une fraction

a et b désignent des nombres relatifs non nuls.

Définition et propriété

4

- Deux nombres relatifs non nuls sont **inverses** l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.
- L'**inverse** du nombre a est le nombre $\frac{1}{a}$; l'**inverse** du nombre $\frac{a}{b}$ est le nombre $\frac{b}{a}$.

Exemples

4 et 0,25 sont inverses car $4 \times 0,25 = 1$.

$-0,01$ et -100 sont inverses car $-0,01 \times (-100) = 1$.

L'inverse de -3 est $\frac{1}{-3}$, c'est-à-dire $-\frac{1}{3}$ ou $-\frac{1}{3}$.

L'inverse de $\frac{5}{7}$ est $\frac{7}{5}$.

Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.

a, b, c et d désignent des nombres relatifs ($b \neq 0, c \neq 0$ et $d \neq 0$) :

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Règle

4

Exemples

$$6 \div 0,5 = 6 \div \frac{1}{2} = 6 \times \frac{2}{1} = 6 \times 2 = 12$$

$$\frac{2}{9} \div \frac{-3}{7} = \frac{2}{9} \times \frac{7}{-3} = \frac{2 \times 7}{9 \times (-3)} = \frac{14}{-27} = -\frac{14}{27}$$

On peut également utiliser l'écriture fractionnaire pour noter la division.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad (b \neq 0, c \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$$

Exemples

$$\frac{-\frac{6}{11}}{\frac{7}{7}} = \frac{-6}{11} \div 7 = \frac{-6}{11} \times \frac{1}{7} = \frac{-6}{77}$$

$$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{-4}{5}} = \frac{7}{3} \div \frac{-4}{5} = \frac{7}{3} \times \frac{5}{-4} = -\frac{35}{12}$$



Il ne faut pas confondre la notation $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{c}$.

Exemples

$$\frac{\frac{-3}{8}}{\frac{5}{5}} = \frac{-3}{8} \div \frac{5}{8} = \frac{-3}{8} \times \frac{8}{5} = -\frac{40}{5}$$

$$\frac{\frac{5}{-3}}{8} = \frac{5}{-3} \div 8 = \frac{5}{-3} \times \frac{1}{8} = -\frac{5}{24}$$